FALCONE

1872

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXVII

Palchetto

Num° d' ordine 7 22975

19 e 54

NAZIONALE
B. Prov.
I
664
NAPOLI

R. BIBLIOTECA VITT. EM. III

B. P
I
664

Digitized by Google

Digitized by Google

606830
Sou

MÉMOIRES

SUR

L'ASTRONOMIE PRATIQUE;

PAR M. J. MONTEIRO DA ROCHA,

Commandeur de l'ordre du Christ, du Conseil de S. A. R. le Prince Régent de Portugal, Maître du Prince de Beira et des Infans de Portugal, Directeur de l'Observatoire Royal de l'Université de Coimbre, etc.

TRADUITS DU PORTUGAIS.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT

DU TRADUCTEUR.

Les Mémoires dont je présente la traduction, ont été publiés dans les volumes I, IV et V des Éphémérides de l'Observatoire royal de Coimbre; leur utilité dans l'Astronomie-pratique m'a paru mériter qu'ils fussent réunis dans un seul volume, et publiés dans une langue plus généralement répandue. Mais en entreprenant ce travail, je m'étais surtout flatté que l'Auteur, mon ancien maître, pourrait me communiquer ou quelques Additions, ou des Notes propres à éclaircir et à développer davantage quelques endroits de l'original: mon attente a été remplie en partie, et le petit nombre de Notes que j'ai pu obtenir de lui a été inséré dans la Traduction aux endroits convenables; et l'on peut dire que, jusqu'à un certain point, elle a été corrigée par l'Auteur. Des circonstances, qu'il m'était impossible de prévoir, m'ont empêché de le consulter sur quelques légers changemens que j'avais crus utiles, dans le seul but de présenter ses propres idées dans un plus grand jour. C'est dans les mêmes vues que j'avais fait des Notes sur les solutions de quelques problèmes donnés par l'Auteur, afin de les comparer avec celles des autres Astronomes qui ont traité les mêmes sujets; mais les mêmes circonstances m'ont obligé d'en interrompre la publication, et de m'arrêter au petit nombre de celles qu'on trouve à la fin de l'Ouvrage.

Puisse l'Auteur regarder ce petit travail avec indulgence, et surtout comme un faible témoignage de la reconnaissance que tous les Portugais doivent à un savant dont le zèle et les lumières ont tant contribué aux progrès des sciences naturelles en Portugal!

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Mémoire sur l'usage du Réticule Rhomboïde, page 1

Mémoire sur l'usage de l'Instrument des Passages, 17

Nouvelle méthode sur le Calcul des Éclipses sujettes aux effets des parallaxes,

§ I. *Construction préliminaire*, 30

§ II. *Problème fondamental*, 31

§ III. *Du Calcul direct des Éclipses pour des lieux déterminés*, 45

§ IV. *Du Calcul inverse des Éclipses pour des lieux déterminés*, 56

§ V. *Détermination des lieux de la Terre entre lesquels les Éclipses sont visibles*, 73

§ VI. *Des lieux de la Terre qui observeront l'Éclipse centrale*, 83

§ VII. *Des plus grandes Phases*, 91

§ VIII. *Des passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil*, 104

Exposition des méthodes particulières employées dans les calculs des Éphémérides de Coimbre, 121

§ I. *Problème fondamental*, 122

§ II. *Problèmes particuliers*, 127

§ III. *Application des problèmes précédens au cas des huitièmes différences, ou de n = 4*, 136

§ IV. *Usage des formules précédentes*, 139

§ V. *Règle d'interpolation*, 151

§ VI. *Démonstration de la règle précédente*, 156

§ VII. *Autre règle d'interpolation*, 161

FIN DE LA TABLE.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'USAGE

DU RÉTICULE RHOMBOÏDE.

1. Le Réticule rhomboïde est, comme on sait, un parallélogramme équilatéral, lequel étant adapté au foyer d'une lunette, sert à déterminer la position relative des astres qui en traversent le champ. Dans les Réticules ordinaires, l'une des diagonales est le double de l'autre; et l'on a préféré cette construction, parce qu'elle facilite les calculs des observations, lorsqu'on s'est assuré d'avance que la plus petite des diagonales est parallèle à l'équateur; mais comme cette opération préparatoire est longue, et que souvent il n'y a pas de temps à perdre, cet avantage cesse d'en être un; il vaudrait beaucoup mieux se servir d'un autre Réticule dont chacun des plus petits angles serait de 45°; en effet, ce second Réticule est non-seulement plus facile à exécuter, mais il aura, de plus, le grand avantage de présenter, pour le passage des astres un plus grand espace entre deux côtés, et les prolongemens des deux autres. Tel est celui que représente la figure 3.

2. Mais quel que soit le Réticule dont on se sert, on doit toujours s'assurer préalablement de l'exactitude de sa figure. Pour cela, il n'y a qu'à construire en grand, et avec toute l'exactitude possible, un Rhomboïde semblable, et le placer à une distance convenable, et perpendiculairement à l'axe optique de la lunette. Cela étant fait, il faut qu'en regardant à travers la

Digitized by Google

lunette, les lignes de cette figure se confondent parfaitement avec les fils du Réticule; et pour éviter des tâtonnemens, on peut placer d'abord à une distance connue, une échelle de parties égales, et observer combien de ces parties sont comprises entre les deux sommets aigus du Réticule, cette dimension étant connue, on s'en servira ensuite pour la construction du rhomboïde cherché. On peut vérifier de la même manière la perpendicularité réciproque des diagonales et l'égalité des angles que chacune d'elles doit partager en parties égales: c'est en quoi l'on trouve souvent les Réticules très-défectueux; mais dans l'usage que nous allons proposer, on peut se passer de ces diagonales et s'épargner par conséquent cette vérification longue et fatigante.

3. *On demande l'expression de l'arc décrit par un astre dans le Réticule, pendant un temps donné.*

Supposons qu'on ait observé deux étoiles connues à leur passage par le même cercle horaire du Réticule: soit A la différence de leurs ascensions droites, réduite à l'unité du degré, et T la différence des temps de leurs passages, réduite à l'unité de l'heure de la pendule; $\frac{A}{T}$ sera l'angle au pôle décrit pendant une de ces heures. Ainsi, nommant D la déclinaison de l'une quelconque de ces étoiles, et faisant $\frac{A}{T}\cos D = \gamma$, on aura l'arc qu'elle décrit pendant le temps $t = \gamma t$. Si le rapport entre le temps sidéral et celui de la pendule est connu d'avance, on en déduira immédiatement la valeur de $\frac{A}{T}$.

4. Mais afin de corriger l'ascension droite, de la variation produite par la réfraction: soit la réfraction en hauteur $= 0^{\circ},0156 \times$ tang. dist. au zénith, comme il est permis de le supposer, pourvu que la hauteur de l'astre ne soit pas moindre que 7°. Nommons, de plus,

H l'angle horaire de l'astre,

D sa déclinaison,

P la hauteur du pôle; il est aisé d'en conclure la réfraction en asceusion droite $= \frac{0^{\circ},0156 \times \sin H}{\cos D^2 (\cos H + \tan g D \tan g P)}$; et sa variation,

en faisant $dH = \frac{A}{T}t$, et supposant de plus

$$r = \frac{0{,}000272\,(1 + \text{tang}\,D\,\text{tang}\,P\,\cos H)}{\cos^2 D\,(\cos H + \text{tang}\,D\,\text{tang}\,P)^2};$$

nous montre qu'on doit faire $\frac{A}{T}(1-r)\cos D = \gamma$, afin d'avoir l'arc décrit pendant le temps $t = \gamma t$. Cette correction n'est pas à négliger dans certains cas; car lorsqu'on a, par exemple, $D = 0$, $H = 82°$, $\frac{A}{T} = 15°$, et $t = 4'$ de temps $= 0^h{,}06666$, on trouve $\gamma t = 0°{,}98596$, au lieu de $\gamma t = 1°$, différence de $50'',5$.

5. Si l'astre a en outre un mouvement propre en ascension droite, comme cela a lieu pour les planètes, nommant α ce mouvement pendant une heure de temps moyen, réduit à l'unité du degré; ce même mouvement, pour une heure de la pendule, sera $= \frac{A}{T}\frac{\alpha}{15°{,}04107}$, et l'on aura $\gamma = \frac{A}{T}\left(1 - r - \frac{\alpha}{15°{,}04107}\right)\cos D$: si le mouvement est rétrograde, α doit être pris avec le signe contraire.

6. Si l'astre n'est pas connu, comme les comètes, qui ont quelquefois un très-grand mouvement en ascension droite, on peut recourir aux observations des passages de l'astre et d'une même étoile par le même cercle horaire sur deux stations du Réticule. Alors, si l'on désigne la différence des temps entre le passage de l'astre et celui de l'étoile, par ϑ, à la première station, et par ϑ' à la seconde, et que, de plus, Θ soit le temps écoulé entre les deux passages de l'astre, on devra faire $\gamma = \frac{A}{T}\left(1 - r - \frac{\vartheta' - \vartheta}{\Theta}\right)\cos D$: il faut prendre ϑ', ϑ négatifs, si l'étoile passe après l'astre; et si la différence $\vartheta' - \vartheta$ est positive, le mouvement est direct; il est rétrograde si elle est négative. Nous ferons voir par la suite comment on pourra se passer, dans ce cas et dans le précédent, du calcul de γ.

7. *Ayant observé les passages d'une étoile connue sur les quatre fils, trouver l'inclinaison du Réticule.*

Nous nommerons *fils orientaux*, ceux dont l'intersection forme l'angle oriental a (fig. 1), et *occidentaux*, ceux qui forment l'angle

opposé b; parmi les uns et les autres nous appelons *premier*, celui qui part du sommet austral A, et *second*, celui qui vient du sommet boréal B; pareillement nous nommerons *premier cercle horaire*, celui qui passe par A, et *second*, celui qui passe par B; nous entendrons de même par *cercle horaire oriental*, celui qui passe par a, et *occidental*, celui qui passe par b.

8. Cela étant, soient les temps du passage de l'étoile par le premier fil oriental $= T$, et par le second $= T'$; par le premier fil occidental $= \Theta$, et par le second $= \Theta'$; si l'on fait, de plus, $T' - T = t$, $\Theta - \Theta' = t'$, $\Theta - T = \tau$, $\Theta' - T' = \tau'$. Alors (l'étoile passant par CF) (fig. 1.) on aura $CD = \gamma t$, $EF = \gamma t'$, $CF = \gamma\tau$, $DE = \gamma\tau'$. Si maintenant on imagine une droite CG menée du point C parallèlement à ab, l'angle FCG sera l'inclinaison demandée. Soit $FCG = \varphi$, et $aAb = 2A$; on aura d'abord $\sin\varphi = \frac{FG}{CF} = \frac{FG}{\gamma t}$, l'angle $CaD = 2A$, $aCG = 90° - A$, $aDC = aCG - \varphi = 90° - (A + \varphi)$, et par conséquent..... $Ca = \frac{\gamma t \cos(A+\varphi)}{\sin 2A}$. Ensuite, en baissant Cm perpendiculaire à ab, on a $aCm = A$, et par conséquent

$$Cm = Ca.\cos A = \frac{\gamma t \cos A \cos(A+\varphi)}{\sin 2A} = \frac{\gamma t(\cot A \cos\varphi - \sin\varphi)}{2}.$$

Pareillement les triangles EbF, Fbh donneront

$$Fh = \frac{\gamma t'(\cot A \cos\varphi + \sin\varphi)}{2} : \text{donc } FG = \frac{\gamma(t'-t)\cot A\cos\varphi + \gamma(t'+t)\sin\varphi}{2},$$

et par conséquent $\sin\varphi = \frac{(t'-t)\cot A\cos\varphi + \gamma(t'+t)\sin\varphi}{2\tau}$; d'où l'on tire $\tang\varphi = \frac{(t'-t)\cot A}{2\tau - (t'+t)}$; et mettant à la place de $t'+t$ sa valeur $\tau - \tau'$, on aura plus simplement $\tang\varphi = \frac{(t'-t)\cot A}{\tau'+\tau}$.

Dans le Réticule ordinaire on a $A = 26° 33' 54'',2$, $\cot A = 2$, et dans celui de 45° (fig. 3), $A = 22° 30'$, $\cot A = 1 + \sqrt{2}$.

9. Si l'étoile traverse cf, dans la partie australe du Réticule, t' et t seront tous les deux négatifs; si elle entre par l'angle a, on aura $t = 0$, et t' sera positif, ou négatif, suivant qu'elle sortira au nord ou au sud de b; si l'étoile entre dans le champ

de la lunette des côtés du nord ou du sud de a, et qu'elle en sorte réciproquement par les côtés du sud ou du nord de b, t' sera négatif dans le premier cas, et t dans le second. Dans tous les cas, ayant égard aux signes, l'inclinaison sera positive, négative ou nulle, suivant que la quantité $t'-t$ deviendra elle-même positive, négative ou nulle. Le premier cercle horaire tombe à l'orient du second, quand l'inclinaison est positive, et à l'occident, lorsqu'elle est négative; et ils ne coïncident ensemble que lorsque le Réticule n'est point incliné.

10. *En supposant la même observation* (n° 7), *on demande les déclinaisons du sommet austral et du boréal, ainsi que la distance des cercles horaires qui passent par ces deux sommets.*

Dans le triangle ACF on a $CF=\gamma\tau$, l'angle AFC ou $aDC=90^\circ-(A+\varphi)$, et par conséquent $AC=\frac{\gamma\tau\cos(A+\varphi)}{\sin 2A}$; or les droites AK, BP perpendiculaires sur CF représentent les cercles horaires, et l'on a dans le triangle ACK, l'angle $C=90^\circ-(A-\varphi)$, et par conséquent $AK=AC\sin C=\frac{\gamma\tau\cos(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A}$, et $CK=AC\cos C=\frac{\gamma\tau\sin(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A}$. Dans les triangles DBE, EBP, on aura pareillement

$$BP=\frac{\gamma\tau'\cos(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A},\text{ et }EP=\frac{\gamma\tau'\sin(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A}.$$

11. Nommons donc D la déclinaison de l'étoile, Δ celle du sommet A, Δ' celle de B, et π la distance PK des cercles horaires; faisons, de plus,

$$m=\frac{\cos(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A},\quad n=\frac{\sin(A-\varphi)\cos(A+\varphi)}{\sin 2A};$$

ces quantités sont constantes et communes à toutes les observations faites dans la même position du Réticule. Cela posé, nous aurons $AK=\gamma m\tau$, $CK=\gamma n\tau$, d'où l'on tire $\Delta=D-\gamma m\tau$, et le temps du passage par $K=T+n\tau$ (n°s 5, 8). On a pareillement $BP=\gamma m\tau'$, $EP=\gamma n\tau'$, par conséquent $\Delta'=D+\gamma m\tau'$, et le temps du passage par $P=\Theta'-n\tau'$, d'où l'on conclut la différence des temps des deux passages $=\Theta'-T-n(\tau'+\tau)$, et

Digitized by Google

en mettant $\tau' + t$ à la place de $\Theta' - T$, on aura enfin

$$\pi = \gamma(\tau' + t) - \gamma n(\tau' + \tau).$$

12. *On demande de trouver aussi la déclinaison de chacun des sommets, soit de l'oriental ou de l'occidental du Réticule, et la distance des cercles horaires qui passent par ces sommets.*

Des sommets a et b, baissons sur CF les perpendiculaires aq, bQ, ces deux lignes représenteront les cercles horaires qui passent par a et b, et dont la distance est Qq. Désignons par δ la déclinaison du point a, par δ' celle du point b, et par π la distance Qq. Les triangles semblables CAF, CaD donnent $CF : CD$, ou (n° 8) $\tau : t :: AC : aC = \frac{t.AC}{\tau}$; les triangles ACK, aCq donnent $AC : AK :: aC : aq = \frac{t.AK}{\tau} = \gamma mt$ (n° 11), et $AC : CK :: aC : Cq = \gamma nt$; on aura donc $\delta = D - \gamma mt$, et le temps du passage par $q = T + nt$.

Les triangles DBE, EbF, BPE, EbQ donneront pareillement $bQ = \gamma mt'$, $EQ = \gamma nt'$, par conséquent $\delta' = D - \gamma mt'$, et le temps du passage par $Q = \Theta' + nt'$; d'où l'on déduit la différence des temps $= \Theta' - T + n(t' - t)$; et puisqu'on a aussi $Qq = CK - Cq + KP + PE + EQ$, en substituant dans cette équation les valeurs trouvées ci-dessus, on aura

$$\pi' = \gamma(\tau' + t) + \gamma n(t' - t).$$

Si l'on nomme encore p, p' les distances des cercles horaires (l'oriental et l'occidental) à celui qui passe par le sommet A, on aura évidemment

$$p = CK - Cq = \gamma n(\tau - t),$$
$$p' = KP + PE + EQ = \gamma(\tau - t') - \gamma n(\tau - t').$$

On doit remarquer que pour avoir les valeurs exactes de γ, Δ, Δ', δ, δ', il faut employer la déclinaison apparente de l'étoile, affectée de la réfraction, et même de l'aberration et de la nutation, et qu'il faut déterminer chacune de ces quantités par le moyen de diverses étoiles connues, afin d'en obtenir des résultats moyens.

13. *Corriger les quantités précédentes de l'effet de la variation de la réfraction en déclinaison.*

Digitized by Google

En supposant le même principe et les mêmes dénominations employées ci-dessus (n° 4), il est facile de conclure que la réfraction en déclinaison est $= \frac{0^{\circ},0156\,(\text{tang}\,P - \text{tang}\,D\cos H)}{\cos H + \text{tang}\,D\,\text{tang}\,P}$; c'est la quantité dont l'astre paraîtra plus au nord ou au sud, selon qu'elle sera positive ou négative. Cette formule nous montre encore que la réfraction des astres en déclinaison, lorsque l'observateur se trouve sur l'équateur, est $= -0^{\circ},0156\,\text{tang}\,D$, et ne dépend par conséquent que de la déclinaison de l'astre; cette propriété est digne de remarque. La différentiation de la même formule, par rapport à H, donne $\frac{0^{\circ},0156\,dH\sin H\,\text{tang}\,P}{\cos^2 D\,(\cos H + \text{tang}\,D\,\text{tang}\,P)^2}$, et en y substituant pour dH l'angle au pôle décrit pendant le temps τ, lequel est $\frac{\gamma\tau}{\cos D}$, et divisant par $\gamma\tau$, on aura l'inclinaison entre le parallèle vrai et le parallèle apparent $\varphi' = \frac{0^{\circ},0156\sin H\,\text{tang}\,P}{\cos^2 D(\cos H + \text{tang}\,D\,\text{tang}\,P)^2}$. Cette inclinaison écarte le parallèle apparent du parallèle vrai, vers le sud, avant le passage par le méridien, et vers le nord, après ce passage, ce qui d'ailleurs est indiqué par le signe de $\sin H$, elle est nulle sur l'équateur, ou au moment du passage de l'astre par le méridien dans un lieu quelconque, et par conséquent très-peu sensible aux approches de l'une de ces circonstances, et encore moins lors de leur réunion.

14. Maintenant, soit CF (fig. 2) le parallèle apparent, et CF' le parallèle vrai; soient menées sur ce dernier les perpendiculaires Am, Bp; ces lignes représenteront les vrais cercles horaires de l'étoile, à son passage par les points m, n; on a vu que l'angle $mAK = \varphi'$ est très-petit; on pourra donc regarder $Am = AK = \gamma m\tau$, d'où l'on conclut $Km = AK\,\text{tang}\,\varphi' = \gamma m\tau\,\text{tang}\,\varphi'$, et par conséquent $Cm = CK + Km = \gamma\tau\,(n + m\,\text{tang}\,\varphi')$ (n° 11); le temps du passage par m sera donc $T + \tau\,(n + m\,\text{tang}\,\varphi')$, et pareillement celui du passage par $n = \Theta' - T'(n + m\,\text{tang}\,\varphi')$; on conclut de là et du n° 11,

$$\pi = \gamma(\tau' + t) - \gamma\,(\tau' + \tau)(n + m\,\text{tang}\,\varphi').$$

On a de même le temps du passage par $q = T + t(n + m\,\text{tang}\,\varphi')$, et celui du passage par $Q = \Theta' + t'(n + m\,\text{tang}\,\varphi')$; on conclut de

Digitized by Google

là et du n° 12,

$$\pi' = \gamma(\tau' + t) + \gamma(t' - t)(n + m \operatorname{tang} \varphi');$$

ainsi que

$$p = \gamma(\tau - t)(n + m \operatorname{tang} \varphi'), \text{ et } p' = \gamma(\tau - t') - \gamma(\tau - t')(n + m \operatorname{tang} \varphi').$$

On a donc, comme ci-dessus,

$$\Delta = D - \gamma m\tau, \ \Delta' = D + \gamma m\tau', \ \delta = D - \gamma mt, \ \delta' = D - \gamma mt'.$$

Toutes ces formules s'appliquent également aux passages par la partie australe du Réticule, en prenant t et t' négatifs.

15. *Ayant observé les passages d'une étoile inconnue, par les deux premiers fils, l'oriental et l'occidental, ou par les deux seconds, déterminer sa déclinaison et le temps de son passage par le premier cercle horaire.*

Désignons par D la déclinaison demandée, et soient les temps du passage, par le premier fil oriental $= T$, par le premier fil occidental $= \Theta$, et $\Theta - T = \tau$. En supposant que les constantes m, n, Δ, Δ', π, φ' aient été déterminées par des observations d'étoiles connues, on aura, d'après ce qu'on a vu jusqu'ici, $D = \Delta + \gamma m\tau$, et le temps du passage par le premier cercle horaire $= T + \tau(n + m \operatorname{tang} \varphi')$. Soient pareillement les temps du passage par le second fil oriental $= T'$, par le second occidental $= \Theta'$, et $\Theta' - T' = \tau'$; on aura, pour le temps du passage par le premier cercle horaire, cette seconde expression $\Theta' - \tau'(n + m \operatorname{tang} \varphi') - \frac{\pi}{\gamma}$; et la déclinaison au moment de ce passage $= \Delta' - \gamma m\tau' - \pi \operatorname{tang} \varphi'$. Ainsi, on aura toujours deux manières différentes de déterminer les étoiles, dans le cas où elles traversent tous les quatre fils du Réticule.

16. On doit remarquer que l'expression de γ (n° 5) contient déjà la déclinaison demandée de l'étoile; mais comme les déclinaisons des sommets A et B sont connues, en estimant à-peu-près la distance de l'étoile à chacun d'eux, on aura une déclinaison de l'étoile, assez approchée pour calculer la première valeur de γ, que l'on pourra encore corriger après, s'il est nécessaire.

La déclinaison trouvée n'est que l'apparente, affectée de la

réfraction actuelle (qui lui appartient lors du passage par le cercle horaire), ainsi que de l'aberration et de la nutation. Quant aux différences des ascensions droites déduites de celles des temps du passage par le même cercle horaire, si l'on supposait que la réfraction en ascension droite fût la même tout le long de cette ligne, il n'y aurait aucune correction à faire ; mais comme elle varie tant soit peu, en raison du changement de déclinaison, il est bon de ne pas négliger cette inégalité : pour cela, il suffit de calculer la réfraction de chacun des sommets A et B, pour en conclure celle de chaque étoile, suivant sa propre déclinaison.

17. *Ayant observé le passage d'une étoile inconnue, par les deux fils orientaux, ou par les deux occidentaux, trouver sa déclinaison, et le temps de son passage par le premier cercle horaire.*

Soient la déclinaison demandée $= D$, le temps du passage par le premier fil oriental $= T$, par le second $= T'$, et $T' - T = t$; en supposant aussi que les constantes m, n, δ, δ', p, p', φ' aient été déterminées par des étoiles connues, on aura $D = \delta + \gamma mt$, au moment du passage par le cercle horaire oriental ; cette déclinaison, au moment où l'étoile traverse le cercle qui passe par A, devient $D = \delta + \gamma mt + p \operatorname{tang} \varphi'$ (n°s 12, 14), et le temps de ce même passage, qui est celui du passage par q, plus le temps de qK, $= T + t(n + m \operatorname{tang} \varphi') + \frac{p}{\gamma}$. De même, soient les temps du passage par le premier fil occidental $= \Theta$, par le second $= \Theta'$, et $\Theta - \Theta' = t'$: comme le temps du passage par le premier cercle horaire est le même que celui du passage par Q, moins le temps de QK, son expression sera $\Theta' + t'(n + m \operatorname{tang} \varphi') - \frac{p'}{\gamma}$, et celle de la déclinaison pour cet instant, sera $D = \delta' + \gamma mt' - p' \operatorname{tang} \varphi'$. Voilà donc deux autres manières de déterminer la position des étoiles qui traversent les quatre fils du Réticule.

18. Quoique les quatre fils deux à deux donnent six combinaisons, il est cependant inutile de s'arrêter aux deux autres qui nous restent, savoir, celle du premier fil oriental avec le second occidental, et celle du second oriental avec le premier occidental : parce qu'en

Digitized by Google

raison de leur parallélisme, ces fils sont traversés en quelque endroit que ce soit du Réticule en des temps qui sont réciproquement comme les cosinus des déclinaisons; et comme ces déclinaisons ont de très-petites différences dans toute l'étendue du Réticule, on ne peut pas les déterminer par la différence des temps, ni même en déduire le temps du passage par le premier cercle horaire.

19. Si l'on veut rapporter au cercle horaire oriental qui passe par a (ce qui devient plus commode dans certains cas) les temps du passage de l'astre par les quatre fils du Réticule et ses déclinaisons, on aura

	Temps du passage par le cercle a.	Déclinaison de l'astre.
(n° 14)	$T+t(n+m\,\text{tang}\,\phi')$	$D=\delta+\gamma mt$
	$\Theta'+t'(n+m\,\text{tang}\,\phi')-\frac{\pi'}{\gamma}$	$D=\delta'+\gamma mt'-\pi'\,\text{tang}\,\phi'$
(n° 15)	$T+\tau(n+m\,\text{tang}\,\phi')-\frac{p}{\gamma}$	$D=\Delta+\gamma m\tau-p\,\text{tang}\,\phi'$
	$\Theta'+\tau'(n+m\,\text{tang}\,\phi')-\frac{\pi+p}{\gamma}$	$D=\Delta'-\gamma m\tau'-(\pi+p)\,\text{tang}\,\phi'$

20. *Ayant observé le passage d'un astre inconnu par les quatre fils du Réticule, on demande sa déclinaison et le temps de son passage par le premier cercle horaire.*

Soit, comme nous avons fait jusqu'ici, le temps du passage

$$\left.\begin{array}{l}\text{par le premier fil oriental} = T,\\ \text{par le second fil oriental} = T',\\ \text{par le premier occidental} = \Theta,\\ \text{par le second occidental} = \Theta',\end{array}\right\} \text{et} \left\{\begin{array}{l}T'-T=t,\\ \Theta-\Theta'=t',\\ \Theta-T=\tau,\\ \Theta-T'=\tau'.\end{array}\right.$$

Comme dans ce cas la déviation entre le parallèle vrai et l'apparent peut devenir considérable, non-seulement par les variations de la réfraction et de la parallaxe, mais plus encore par celle de la déclinaison de l'astre, nous ne pourrons faire, comme ci-dessus (n° 14), $Am=AK$. Désignons donc par Φ l'inclinaison du Réticule à l'égard du parallèle apparent, on aura d'abord $\text{tang}\,\Phi=\frac{(t'-t)\cot A}{\tau'+\tau}$ (n° 8); faisons ensuite $m=\frac{\cos(A-\Phi)\cos(A+\Phi)}{\sin 2A}$;

$n = \frac{\sin(A-\Phi)\cos(A+\Phi)}{\sin 2A}$ et $\Phi' = \Phi - \varphi - \varphi'$; on aura (n° 14) l'angle $mAK = \Phi'$, et par conséquent $Am = \frac{AK}{\cos\varphi'} = \frac{\gamma m\tau}{\cos\Phi'}$; on en conclut pareillement le temps du passage par le premier cercle horaire $= T + \tau(n + m\tang\Phi')$ et $D = \Delta + \frac{\gamma m\tau}{\cos\varphi'}$; le temps du passage par le cercle horaire oriental $= T + t(n + m\tang\Phi')$, et la déclinaison $D = \delta + \frac{\gamma mt}{\cos\Phi'}$. Les autres réductions se feront aisément, d'après ce qu'on a dit (nos 17, 19).

21. On peut remarquer ici d'abord, que les temps des passages par les cercles horaires sont indépendans de γ, et que par conséquent on pourra les trouver par le moyen de quantités connues sur les deux stations du Réticule, et qui entrent dans la formation de ce coefficient (n° 6); de plus, les quantités φ, φ', Φ, Φ', m, n sont différentes pour chacune de ces stations, à moins que le Réticule ne soit monté parallatiquement et avec toute l'exactitude possible. Pour ce qui regarde la quantité D, qui entre aussi dans la formation de γ, et qui peut être très-différente dans les deux stations, on en prendra une première valeur approchée, ainsi que nous l'avons dit (n° 16) à l'égard des étoiles inconnues. D'ailleurs, le calcul des deux stations n'est pas inutile; car on en obtient, non pas une seule position de l'astre, mais celle qu'il a eue dans deux temps différens. Si, au reste, on ne veut qu'une de ces positions, il n'y a qu'à faire coïncider le centre de l'astre sur le sommet oriental a, et fixer le Réticule dans cette position, en attendant le passage de quelque étoile connue, par le moyen de laquelle on déterminera la déclinaison du point a, qui est la même que celle de l'astre au moment de son passage par ce point; et quant à l'ascension droite, ce sera celle qui résulte du temps écoulé depuis ce moment jusqu'à celui du passage de l'étoile par le cercle horaire oriental.

22. *Ayant observé les contacts du même bord d'un astre avec les quatre fils du Réticule, trouver la déclinaison de l'astre, et le temps du passage de son centre par l'un quelconque des cercles horaires.*

Digitized by Google

Soient a, a', α', α, (fig. 3) les points de contact de l'astre avec chacun des quatre fils. Désignons par les lettres centrales S, S', Σ', Σ les temps correspondans à ces contacts; T, T', Θ', Θ représenteront, comme jusqu'ici, les temps du passage du centre de l'astre par chacun des quatre fils; soit de même Φ l'inclinaison du Réticule par rapport au parallèle apparent CF, et l'angle $FAC = 2A$. Cela étant, on a d'abord $ACF = 90° - A + \Phi = aCS = \alpha' E\Sigma'$, et $AFC = 90° - A - \Phi = \alpha F\Sigma = a'DS'$; ensuite nommant s le demi-diamètre de l'astre, nous aurons $SC = \Sigma' E = \frac{s}{\cos(A-\Phi)}$, et $\Sigma F = S'D = \frac{s}{\cos(A+\Phi)}$, d'où l'on déduit

$$T = S \pm \frac{s}{\gamma \cos(A-\Phi)},$$

$$T' = S' \pm \frac{s}{\gamma \cos(A+\Phi)},$$

$$\Theta' = \Sigma' \pm \frac{s}{\gamma \cos(A-\Phi)},$$

$$\Theta = \Sigma \pm \frac{s}{\gamma \cos(A+\Phi)},$$

en prenant le signe + pour le temps du passage du premier bord, et le signe — pour le passage du second. Il résulte de ces équations

$$(\Theta - \Theta') - (T' - T) = t' - t = \Sigma - \Sigma' + S - S'$$
$$(\Theta - T) + (\Theta' - T') = \tau' + \tau = \Sigma - S + \Sigma' - S';$$

et comme $\text{tang}\,\Phi = \frac{t'-t}{\tau'+\tau} \cot A$, (n° 8), on aura aussi

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{(\Sigma - \Sigma' + S - S')\cot A}{\Sigma - S + \Sigma' - S'}.$$

23. L'angle Φ étant ainsi déterminé, on peut également déduire de l'observation le demi-diamètre de l'astre; il ne faut pour cela que bien observer les temps du contact de ses deux bords avec le même fil, ce qui est toujours possible à l'égard du Soleil et de la pleine Lune. Ainsi, nommant ϑ la différence des temps, on aura, pour les contacts du premier fil oriental, ou du second occidental $s = \frac{1}{2}\vartheta\gamma \cos(A-\Phi)$; et pour ceux du second fil orien-

Digitized by Google

tal, ou du premier occidental $s = \frac{1}{2}\vartheta\gamma\cos(A+\Phi)$. Avec la même inclinaison Φ on calculera les valeurs de T, T', Θ, Θ', et par conséquent celles de t, t', τ, τ'; le reste se fait comme dans le problème précédent (n° 20).

24. *Corriger les quantités déterminées précédemment de l'inexactitude provenante de la courbure du parallèle.*

Toutes les formules que nous venons de donner sont rigoureuses pour les astres qui n'ont point de déclinaison; elles donnent encore des valeurs très-approchées, quand la déclinaison est petite; mais lorsqu'elle est considérable, on ne peut pas regarder le parallèle comme une ligne droite, ni les cercles horaires comme parallèles entre eux. On pourrait cependant remédier à cet inconvénient, en rétrécissant de plus en plus les Réticules à mesure que les déclinaisons iraient en augmentant; par là les portions de parallèles comprises entre les filets deviendraient plus petites. Voyons néanmoins comment on peut tenir compte de la courbure du parallèle, par le seul moyen du calcul.

25. Soient BmC (fig. 4) une petite portion d'un parallèle de la surface de la sphère, BC un arc de grand cercle qui passe par les extrémités du premier, et qui lui sert de corde. Les arcs BmC, BC ne diffèrent, il est vrai, en grandeur, que d'un infiniment petit du troisième ordre, et l'on pourrait prendre l'un pour l'autre; mais quant à leur position réciproque, on ne peut les supposer coïncidans sans une erreur du second ordre, qu'il ne faut pas négliger en certains cas. Il en est de même pour les cercles horaires, comme PK, lesquels seront d'autant plus inclinés sur BC, que le point K sera plus écarté du milieu M de cet arc. Soit en effet, dans le triangle sphérique PMK, l'angle $MKP = 90° - z$, et D la déclinaison du point K, infiniment peu différente de celle du point C; on aura d'abord $\sin z = \text{tang } MK.\cot PK$, et par conséquent l'inclinaison $z = MK.\text{tang } D$. Ensuite dans le triangle PMC, soit $Mm = x$, on aura $\cos PC = \cos MC.\cos(PC - x) = (1 - \frac{1}{2}\overline{MC}^2)(\cos PC + x\sin PC)$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}\overline{MC}^2\,\text{tang } D$. Soit enfin dans le triangle PMK, $Kk = y$, on aura $\cos(PC - y) = \cos MK.\cos(PC - x)$, d'où l'on tire $y = x - \frac{1}{2}\overline{MK}^2\,\text{tang } D = \frac{1}{2}(\overline{MC}^2 - \overline{MK}^2)\,\text{tang } D = \frac{1}{2}BK.KC.\text{tang } D$.

Digitized by Google

Les arcs rectifiés y, BK, KC, sont comptés en parties du rayon; et pour les réduire à l'unité du degré, il faudra multiplier chacun d'eux par le nombre constant $\frac{3,14159265}{180^\circ} = 0,017454$, que je fais $= 2a$, et l'on aura enfin

$$y = aBK.KC.\text{tang}\,D.$$

26. Cela étant, soit (fig. 1) $C'D'E'F'$ le parallèle décrit par l'astre; ayant déterminé d'abord une valeur approchée de φ, dans la supposition que tous ses points sont en ligne droite, on passera ensuite à réduire les temps des points intermédiaires à ce qu'ils devraient être, dans le cas où $C'F'$ serait la droite décrite. Baissons donc les perpendiculaires $D'n$, $E'r$; d'après ce que nous venons de démontrer, et en conservant les dénominations du n° 8, on aura $D'n = a\gamma t.\gamma(\tau - t)\,\text{tang}\,D$, et dn, en temps, $= a\gamma t(\tau - t)\,\text{tang}\,D\,\text{tang}\,(A + \varphi)$; et par conséquent au lieu de T' on devra employer l'expression

$$T' + a\gamma t(\tau - t)\,\text{tang}\,D\,\text{tang}\,(A + \varphi).$$

On trouve pareillement qu'au lieu de Θ' on doit écrire

$$\Theta' - a\gamma t'(\tau - t')\,\text{tang}\,D.\text{tang}\,(A - \varphi).$$

Lorsque l'astre passe par la partie australe du Réticule, ce sont les temps intermédiaires T, Θ que l'on doit réduire, et dans ce cas, les temps t et t' étant d'eux-mêmes négatifs, nous aurons aussi

$$C's = -a\gamma t.\gamma(\tau' + t)\,\text{tang}\,D \quad \text{et} \quad F'u = -a\gamma t'.\gamma(\tau + t')\,\text{tang}\,D,$$

d'où il suit qu'au lieu de T, il faut prendre

$$T + a\gamma t(\tau' + t)\,\text{tang}\,D.\,\text{tang}\,(A - \varphi),$$

et au lieu de Θ,

$$\Theta - a\gamma t'(\tau' + t')\,\text{tang}\,D.\text{tang}\,(A + \varphi).$$

27. Avec les temps ainsi réduits, on calculera de nouveau les valeurs de φ, m, n (n°s 8, 11), ainsi que l'expression.. $r = \frac{\sin(A + z)\cos(A - \varphi)}{\sin 2A}$, et l'on trouvera, comme ci-dessus

Digitized by Google

(n°s 17, 19), les temps des passages, que donnent les quatre combinaisons des fils, rapportés tous au temps du passage par un même cercle horaire apparent, et l'on en prendra le moyen arithmétique comme le résultat exact de ces combinaisons, sans qu'il y manque que la correction due à l'inclinaison entre les véritables cercles horaires et les cercles supposés AK', ou aq. On trouvera aisément, d'après ce qui vient d'être exposé, que ces corrections sont, pour le premier cercle horaire,

$$\left\{\begin{array}{l} a\gamma m\tau^2(t-2n)\tang D, \text{ dans la partie boréale du Réticule,} \\ a\gamma m\tau'(t'-2n\tau'+2t)\tang D, \text{ dans la partie australe;} \end{array}\right.$$

et pour le cercle horaire oriental,

$$\left\{\begin{array}{l} a\gamma mt(\tau-2nt)\tang D, \text{ dans la partie boréale du Réticule,} \\ a\gamma mt(t'+2\nu t)\tang D, \text{ dans la partie australe.} \end{array}\right.$$

La quantité t est négative seulement pour la partie australe du Réticule, et $\tang D$ le sera pour toutes les deux lorsque la déclinaison sera australe.

28. Au moyen d'un calcul semblable on trouvera pour la partie boréale du Réticule

$$\begin{aligned} \delta &= D - \gamma mt + a\gamma^2 nt(\tau - nt)\tang D, \\ \Delta &= D - \gamma m\tau + a\gamma^2 n\nu\tau^2\tang D, \\ \Delta' &= D + \gamma m\tau' + a\gamma^2(t'+n\tau')(t+\nu\tau')\tang D, \\ \delta' &= D - \gamma mt' + a\gamma^2\nu t'(\tau-\nu t')\tang D; \end{aligned}$$

et pour la partie australe

$$\begin{aligned} \delta &= D - \gamma mt - a\gamma^2\nu t(\tau'-\nu t)\tang D, \\ \Delta &= D - \gamma m\tau + a\gamma^2(t-n\tau)(t'-\nu\tau)\tang D, \\ \Delta' &= D + \gamma m\tau' + a\gamma^2 n\nu\tau'^2\tang D, \\ \delta' &= D - \gamma mt' - a\gamma^2 nt'(\tau'+nt')\tang D. \end{aligned}$$

Par ces équations et au moyen d'étoiles connues, on calculera δ, Δ, etc., et ces quantités étant ainsi déterminées, on aura D pour tout autre astre inconnu: il faut néanmoins observer

Digitized by Google

que chacune de ces équations ne donne que la déclinaison correspondante au moment du passage de l'astre par le cercle horaire respectif, et que par conséquent, si cette déclinaison varie pendant que l'astre traverse le Réticule, on doit la réduire à ce qu'elle devrait être à l'instant du passage auquel on a rapporté tous les autres temps (n° 20). Mais il faut comparer l'angle φ donné par cet astre, à celui que donnera une étoile qui passe à-peu-près par le même endroit; et cela, parce que dans la supposition d'une courbure sensible, les droites CF, $C'F'$ ne sont exactement parallèles entre elles dans toute l'étendue du Réticule, que dans le cas de $\varphi = 0$.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'USAGE

DE L'INSTRUMENT DES PASSAGES.

1. Avant l'invention de la Lunette méridienne, c'est-à-dire, de l'instrument destiné particulièrement à observer les passages des astres par le méridien, on regardait le Quart de cercle mural comme l'instrument le plus propre à cet usage; et si en effet celui-ci eût pu parfaitement remplacer le premier, rien n'eût été plus commode que d'observer en même temps et avec le même instrument, la hauteur des astres et leurs passages par le méridien. Mais, il est presqu'impossible que ces lourdes masses conservent long-temps, sans altération, leur figure plane, dans le cas même où l'on aurait réussi à la leur donner originairement; de plus, il est très-difficile de les ajuster rigoureusement dans le plan du méridien; on pouvait donc encore moins espérer que l'alidade, en parcourant le limbe, fît décrire à l'axe optique de la lunette un plan toujours parallèle à celui de l'Instrument: car ce mouvement se faisant autour d'un axe très-court, la plus petite déviation dans la perpendicularité de cet axe au plan de l'Instrument, doit produire une erreur très-sensible dans le parallélisme de la lunette. C'est ainsi que dans les Quarts de cercles, exécutés même par les meilleurs artistes, on n'en trouve pas un dont l'alidade porte également sur les diverses parties du limbe; et ce défaut, qui n'influerait presque pas sur les hauteurs observées, donnerait des erreurs sensibles sur les passages par le méridien.

2. Cependant, malgré ces raisons, l'expérience seule a dé-

trompé à cet égard, et l'on s'est vu enfin obligé de séparer les observations; on a gardé les Quarts de cercles seulement pour les hauteurs, et l'on a introduit un autre instrument pour les passages. C'est une lunette fixée à angles droits sur un axe horizontal de rotation assez grand pour qu'on puisse aisément le diriger et l'arrêter avec précision, afin que l'axe optique de la lunette décrive exactement le plan du méridien. Tel est l'Instrument des passages, dont l'usage marque l'époque de la perfection des observations astronomiques, et qui a rendu presque inutiles toutes celles qu'on avait faites auparavant au Quart de cercle mural. L'usage de cet instrument n'exige absolument la présence de deux observateurs, l'un à la Lunette méridienne et l'autre au Quart de cercle, que dans le cas où l'on aurait besoin d'observer des astres qui se suivent de très-près les uns les autres, ce qui est très-rare; un seul peut tout faire dans les autres cas, puisque la réduction des hauteurs observées au Quart de cercle, peu de temps avant ou après le passage par le méridien, est aussi facile que rigoureuse.

3. L'exactitude de l'Instrument des passages dépend de cinq vérifications différentes, dont trois constituent la bonté de l'instrument même, et doivent être exécutées par l'Artiste; les deux autres ne regardent que la manière de le placer, et doivent être faites par l'Astronome; la première consiste en ce que l'objectif soit bien centré, et la seconde, en ce que les fils se trouvent précisément à son foyer, afin d'éviter la parallaxe qui en résulterait, si cette condition n'était pas bien remplie. Quoique ces deux ajustemens soient ordinairement fixés par l'Artiste même, il est toujours bon de s'en assurer et de les rajuster, surtout si, par quelqu'accident, on avait dérangé l'objectif ou les fils.

4. La troisième est, que l'axe optique ou ligne de collimation soit exactement perpendiculaire à l'axe du mouvement; cet objet regarde encore l'Artiste; mais comme le dérangement peut plutôt y avoir lieu qu'à l'égard des deux autres, on doit aussi plus souvent en faire la vérification, et rajuster dans le cas où l'on y remarquerait quelque déviation. On sait qu'il est facile d'y parvenir, en pointant d'abord la Lunette vers un objet terrestre assez

Digitized by Google

éloigné et qui s'apperçoive distinctement, de manière que le filet vertical du milieu du réticule le coupe bien par le milieu; si ensuite, en retournant l'axe de rotation bout pour bout, on retrouve pareillement ledit objet sous le même filet, les deux axes seront exactement perpendiculaires entre eux; si au contraire on trouve une différence, on en corrigera une moitié par le mouvement azimutal de l'axe de rotation, et l'autre par celui du réticule dans le même sens; et l'on répétera cette opération, jusqu'à ce qu'on parvienne à obtenir une parfaite coïncidence pour les deux positions contraires de l'axe de rotation. Mais lorsque l'horizon n'est pas à découvert, ou si l'Artiste, croyant avoir réussi complètement sur cet objet, n'a point ajouté les vis nécessaires pour mouvoir la platine du réticule, ou enfin lorsqu'on n'a pas le temps de le faire, on peut cependant, par des observations, connaître l'erreur de cette vérification, et en tenir compte, comme nous allons le voir tout-à-l'heure.

5. Pour que la Lunette décrive exactement un vertical, il faut que l'axe de rotation soit parfaitement horizontal; et pour que ce vertical soit le méridien, il faut qu'il soit dans la direction des vrais points de l'Est et de l'Ouest. On parvient à l'ajuster définitivement dans ces deux directions, par des observations astronomiques, quoique cependant on puisse obtenir la première avec le secours d'un niveau ou d'un fil à plomb; mais ces procédés, quoique simples en théorie, ne sont rien moins que faciles dans la pratique, pour en obtenir une grande précision. Ce degré de précision dépend encore de la construction de l'instrument: en effet, il ne suffit pas que l'observateur ait placé l'axe bien horizontalement, ou qu'il en connaisse l'inclinaison par rapport à une certaine position de la lunette, il faut encore que cette inclinaison reste constamment la même, lorsqu'on fait parcourir à la lunette tout le demi-cercle du méridien. Pour cela, il faut, 1°. que les deux tourillons ou extrémités de l'axe de rotation soient des cylindres de même base, parfaitement bien arrondis au tour et dont les axes existent dans le prolongement d'une même droite; 2°. que les crochets qui servent à suspendre le niveau sur les tourillons soient parfaitement égaux et semblables, de manière que les points de contact correspondans se trouvent dans une même droite

parallèle à l'axe des tourillons; 3°. et enfin que les coches angulaires des deux coussinets sur lesquelles portent les tourillons soient de même parfaitement égales et semblables.

6. C'est de la précision à laquelle on peut parvenir en travaillant toutes ces pièces, que dépend toute la justesse de l'Instrument, et quand une fois on l'a obtenue, il faut avoir grand soin de le garantir de toute secousse violente. Mais pour reconnaître s'il a quelque défaut à cet égard, il est nécessaire de s'assurer d'abord de l'horizontalité de l'axe de rotation, au moins pour une situation donnée de la lunette. Pour cela, il faut commencer par suspendre librement le niveau sur les tourillons, et observer à quel endroit de l'*index* s'arrête le centre de la bulle d'air; ensuite on retourne le niveau bout pour bout, et l'on observe de même dans cette nouvelle position l'endroit où s'arrête le centre de la bulle d'air: alors par le moyen de la vis qui tient à un côté du châssis du niveau, on ramène ce centre bien au milieu des deux stations où il s'était arrêté auparavant. On répétera cette même opération, jusqu'à ce qu'enfin le centre de la bulle d'air s'écarte constamment du centre du niveau, de la même quantité et vers le même côté (à droite ou à gauche), dans la situation ou directe, ou renversée du niveau; cela étant fait, on peut dire que l'axe du niveau et celui de l'Instrument auquel il est suspendu sont parallèles entre eux. Maintenant, pour mettre ces axes dans la situation horizontale, il n'y a qu'à hausser ou baisser l'un des coussinets, au moyen de sa vis, jusqu'à ce que le centre de la bulle d'air s'arrête bien au milieu du niveau: si alors, en retournant le niveau bout pour bout, ou même tout l'Instrument, la bulle d'air ne change point de place, on peut regarder l'axe de l'Instrument comme parfaitement horizontal, au moins pour une situation donnée de la lunette. Enfin si cette stabilité du niveau se conserve tandis qu'on retourne la lunette de l'un et de l'autre côté du zénith jusqu'à l'horizon, on peut regarder l'Instrument comme parfait; car si les tourillons de l'axe, les crochets du niveau et les coches des coussinets, ne se rapportaient pas parfaitement entre eux, il serait hors de toute probabilité que leurs défauts se correspondissent toujours si exactement qu'il n'en résultât aucune al-

Digitized by Google

tération dans le niveau; si au contraire le niveau indique quelques variations, il est évident qu'elles peuvent dépendre des défauts de l'une seule, ou de plusieurs de ces parties, sans que l'on puisse déterminer, par exemple, si l'erreur sur l'horizontalité de l'axe de l'Instrument est plus grande ou plus petite que celle qui est indiquée par le niveau. Dans cette incertitude, le seul parti à prendre, c'est de chercher à déterminer les erreurs de ces ajustemens, au moyen des étoiles qui passent dans des situations où l'horizontalité de l'axe est confirmée par le niveau; ensuite avec ces erreurs et les passages d'étoiles d'espace en espace, dans les autres situations de la lunette, on en trouvera les valeurs successives dont on formera un tableau, afin d'en conclure par interpolation celles qui correspondent aux points intermédiaires, et l'on en tiendra compte dans la réduction des observations. C'est ce dont nous allons nous occuper dans les problèmes suivans.

7. *Étant données les erreurs des trois vérifications* (nos 4, 5) *et ayant observé le temps du passage d'un astre par la Lunette méridienne, trouver celui de son passage par le méridien.*

Soit AZB (fig. 5) le demi-cercle du méridien, AOB le demi-cercle oriental de l'horizon, P le pôle, Z le zénith et O le vrai point de l'Est. Supposons maintenant qu'au lieu de O, c'est le point E qui se trouve sur le prolongement de l'axe de l'Instrument, et que l'axe optique de la Lunette faisant avec le premier un angle $= 90 - z$ vers l'orient, décrive le méridien PS au lieu de PZ: cela étant, il s'agit de déterminer le petit angle ZPS, au moyen de l'observation du temps du passage d'un astre par la Lunette dirigée au point S.

8. Soient menés les arcs ZED, OEC, EP, ES,

$$\text{nommons} \begin{cases} BP = p, & DOE = \varphi \\ PS = 90^\circ - \delta, & ZPS = h \\ OD = x, & \\ DE = y, & \end{cases}$$

Les arcs y, x, z, h étant très-petits, on a d'abord $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\varphi$, et par conséquent $PC = p - \varphi$, et $OE = \frac{x}{\cos\varphi}$; ensuite dans le triangle

EPS, on a $\cos EPS = \frac{\cos ES - \cos PE \cos PS}{\sin PE \sin PS} = \frac{z - \sin \delta \cos PE}{\cos \ldots} =$ $\cos(EPZ - h) = \cos EPZ + h \sin EPZ = \cos EPZ + h$, parce que EPZ est très-peu différent de 90°. Pareillement, le triangle ZPD donne $\cos EPZ = \frac{\cos ZE - \cos ZP \cos PE}{\sin ZP \,.\, \sin PE} = \frac{y - \sin p \,.\, \cos PE}{\cos p}$, et par conséquent $h = \frac{z}{\cos \delta} - \frac{y}{\cos p} + \cos PE\,(\text{tang}\, p - \text{tang}\, \delta)$: enfin dans le triangle ECP rectangle en C on a $\cos PE =$ $\cos EC \cos PC = \frac{x}{\cos \varphi} \cos(p - \varphi) = x \cos p + x \,\text{tang}\, \varphi \sin p = x \cos p$ $+ y \sin p$; donc en substituant cette valeur dans celle de h, on aura, après les réductions convenables,

$$h = \frac{z + x \sin(p - \delta) - y \cos(p - \delta)}{\cos \delta}.$$

9. Dans les passages inférieurs des astres, au lieu de δ, on doit prendre $180° - \delta$, et la formule précédente devient, dans ce cas,

$$h = \frac{-z + x \sin(p + \delta) - y \cos(p + \delta)}{\cos \delta}.$$

Soit maintenant t le temps du passage de l'astre par la Lunette, T celui d'une révolution diurne de l'astre ; le temps du passage de l'astre par le méridien sera $= t + \frac{hT}{360°}$.

10. *Ayant observé à la Lunette méridienne les passages de trois étoiles dont les distances nord et sud soient les plus grandes possibles, et ayant déterminé par des observations de hauteurs correspondantes les temps de leurs passages au méridien, déterminer les erreurs* x, y, z *des trois vérifications.*

Soit p la hauteur du pôle,
δ, δ', δ'' les déclinaisons des trois étoiles,
t, t', t'' les temps de leurs passages à la Lunette méridienne, et
τ, τ', τ'' ceux du passage par le méridien, conclus par des hauteurs correspondantes.

Nommons T le temps de la révolution des étoiles donné par la pendule, on aura (n° 9)

Digitized by Google

$$h = \frac{360^\circ\,(\tau - t)}{T},$$

$$h' = \frac{360^\circ\,(\tau' - t')}{T},$$

$$h'' = \frac{360^\circ\,(\tau'' - t'')}{T};$$

faisons, pour abréger,

$$\left\{\begin{array}{l} a = h\cos\delta \\ a' = h'\cos\delta' \\ a'' = h''\cos\delta'' \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} p - \delta = d \\ p - \delta' = d' \\ p - \delta'' = d'' \end{array}\right\} \text{ partant } \left\{\begin{array}{l} d - d' = \delta' - \delta \\ d - d'' = \delta'' - \delta \\ d' - d'' = \delta'' - \delta' \end{array}\right\},$$

on aura (n° 8), pour la détermination des quantités x, y, z, les trois équations fondamentales

$$a = z + x\sin d - y\cos d,$$
$$a' = z + x\sin d' - y\cos d',$$
$$a'' = z + x\sin d'' - y\cos d''.$$

En éliminant y des deux premières, il viendra

$$a\cos d' - a'\cos d = z\,(\cos d' - \cos d) + x\sin(d - d');$$

en changeant a' en a'', et d' en d'', il vient

$$a\cos d' - a''\cos d = z\,(\cos d'' - \cos d) + x\sin(d - d'');$$

et en changeant a en a' et d en d', on trouve

$$a\cos d'' - a''\cos d' = z\,(\cos d'' - \cos d') + x\sin(d' - d'');$$

et enfin en retranchant la seconde de ces dernières équations de la somme des deux autres, et dégageant x, on obtient

$$x = \frac{a(\cos d' - \cos d'') - a'(\cos d - \cos d'') + a''(\cos d - \cos d')}{\sin(d' - d'') - \sin(d - d'') + \sin(d - d')}.$$

Par des opérations semblables on trouve

$$y = \frac{a(\sin d - \sin d'') - a'(\sin d - \sin d'') + a''(\sin d - \sin d')}{\sin(d' - d'') - \sin(d - d'') + \sin(d - d')},$$

et substituant ces valeurs de x et de y dans l'une quelconque des équations fondamentales, on aura, après les réductions,

Digitized by Google

$$z = \frac{a\sin(d'-d'') - a'\sin(d-d'') + a''\sin(d-d')}{\sin(d'-d'') - \sin(d-d'') + \sin(d-d')},$$

et partant,

$$z = \frac{a\sin(\delta''-\delta') - a'\sin(\delta''-\delta) + a''\sin(\delta'-\delta)}{\sin(\delta''-\delta') - \sin(\delta''-\delta) + \sin(\delta'-\delta)}.$$

11. Cette dernière équation, qui donne l'erreur sur la perpendicularité réciproque des axes de l'Instrument, est remarquable, en ce qu'elle ne dépend point de la hauteur du pôle; il n'en est pas de même à l'égard des valeurs de x et de y. En regardant z comme connue, les deux premières équations fondamentales donnent

$$x = \frac{(a-z)\cos d' - (a'-z)\cos d}{\sin(d-d')}$$

$$y = \frac{(a-z)\sin d' - (a'-z)\sin d}{\sin(d-d')}.$$

12. Ces erreurs étant ainsi déterminées, il ne reste plus qu'à corriger les observations des astres inconnus, qu'on aura faites dans cette situation de l'Instrument, et cela est absolument nécessaire, surtout pour les Instrumens portatifs que l'on a placés sans beaucoup de précision, pour peu de temps, et lorsqu'on n'en a pas eu assez pour pratiquer toutes les vérifications qui sont indispensables dans les observatoires fixes. Pour ce qui regarde la manière d'appliquer à l'Instrument la correction z (n° 4), elle ne peut se faire que par des tâtonnemens longs et ennuyeux, à moins que l'on n'adapte à la platine du réticule une vis à micromètre, pour lui donner le mouvement requis. Lorsqu'il n'y a qu'une simple vis pour faire ces ajustemens, il faut déterminer préalablement par l'expérience, de combien chaque tour de cette vis fait dévier l'axe; et en déduire ensuite la quantité angulaire du mouvement qui lui correspond. Après qu'on a parfaitement ajusté la Lunette dans la direction du méridien, par plusieurs observations répétées, il faut placer solidement une marque à une grande distance dans l'horizon, laquelle paraisse coupée bien au milieu par l'un des filets verticaux : ce repère servira à remettre la Lunette dans la direction du méridien, dans le cas où elle viendrait à s'en écarter par quelqu'accident; et comme tout s'altère et se déforme à la longue, il faudra répéter de temps en temps toutes ces vérifications.

Digitized by Google

13. *Supposons qu'on n'ait observé par des hauteurs correspondantes, que le passage d'une seule des étoiles au méridien, et que les différences entre l'ascension droite de cette étoile, et celles des deux autres, soient données. On demande les mêmes quantités du* x, y, z.

En conservant les mêmes dénominations du problème précédent, et nommant de plus α la différence en ascension droite entre la première étoile et la seconde, α' la différence entre la première et la troisième; on aura d'abord $h = \frac{360^\circ(\tau - t)}{T}$. Observons ensuite (afin de déterminer h', h'') que les temps des passages par le méridien sont $t + \frac{hT}{360^\circ}$, $t' + \frac{h'T}{360^\circ}$, $t'' + \frac{h''T}{360^\circ}$ (n° 9), et que par conséquent les différences en ascension droite seront

$$t' - t + \frac{T}{360^\circ}(h' - h), \quad t'' - t + \frac{T}{360^\circ}(h'' - h), \text{ en temps, et}$$

$$\frac{360^\circ}{T}(t' - t) + h' - h = \alpha, \quad \frac{360^\circ}{T}(t'' - t) + h'' - h = \alpha', \text{ en degrés.}$$

Soit

$$\mathcal{C} = \alpha - \frac{360^\circ}{T}(t' - t), \text{ et } \mathcal{C}' = \alpha' - \frac{360^\circ}{T}(t'' - t),$$

on aura

$$h' = \mathcal{C} + h, \quad \text{et} \quad h'' = \mathcal{C}' + h, \quad \text{ou bien (n° 10.)}$$

$$a = h\cos\delta, \quad a' = (\mathcal{C} + h)\cos\delta', \quad a'' = (\mathcal{C}' + h)\cos\delta''.$$

14. Si l'on substitue maintenant ces valeurs de a, a', a'', dans la dernière expression de z (n° 10), le numérateur deviendra $\mathcal{C}'\cos\delta''\sin(\delta' - \delta) - \mathcal{C}\cos\delta'\sin(\delta'' - \delta) + h[\cos\delta\sin(\delta'' - \delta') - \cos\delta'\sin(\delta'' - \delta) + \cos\delta''\sin(\delta' - \delta)]$: mais le coefficient de h, développé à la manière ordinaire, est égal à zéro; donc

$$z = \frac{\mathcal{C}'\cos\delta''\sin(\delta' - \delta) - \mathcal{C}\cos\delta'\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' - \delta') - \sin(\delta'' - \delta) + \sin(\delta' - \delta)}.$$

Cette seconde expression de z, également remarquable en ce qu'elle ne dépend point de h, nous montre que l'observation du passage de la première étoile, n'est pas nécessaire pour déterminer cette erreur.

15. En substituant de même dans les expressions de x et de y (n° 11) les valeurs de a et de a' (n° 13), et celles de d et d'. (n° 10), on trouvera facilement

$$x = +h\sin p + \frac{(z-\zeta\cos\delta')\cos(p-\delta)-z\cos(p-\delta')}{\sin(\delta'-\delta)},$$

$$y = -h\cos p + \frac{(z-\zeta\cos\delta')\sin(p-\delta)-z\sin(p-\delta')}{\sin(\delta'-\delta)}.$$

16. Lorsque la Lunette a été parfaitement bien ajustée, au moyen de la marque placée à l'horizon dans la direction du méridien (n°12), ou bien, si l'on a tout lieu de croire que l'axe de l'Instrument, vérifié par le niveau avant les observations, est parfaitement horizontal, alors, l'une des deux quantités x ou y étant nulle, on pourra déterminer l'autre indépendamment de h, c'est-à-dire, sans observer le passage de la première étoile au méridien par des hauteurs correspondantes; car la supposition de.....

$x = 0$ donne $h = \frac{z\cos(p-\delta')-(z-\zeta\cos\delta')\cos(p-\delta)}{\sin p\sin(\delta'-\delta)}$, et celle de

$y = 0$ donne $h = \frac{(z-\zeta\cos\delta')\sin(p-\delta)-z\sin(p-\delta')}{\cos p\sin(\delta'-\delta)}$; si maintenant on substitue la première de ces deux valeurs de h dans l'équation en y, et la seconde dans l'équation en x on aura,

lorsque $x = 0$, $y = \frac{(z-\zeta\cos\delta')\cos\delta-z\cos\delta'}{\sin p\sin(\delta'-\delta)}$,

et

lorsque $y = 0$, $x = \frac{(z-\zeta\cos\delta')\cos\delta-z\cos\delta'}{\cos.p\sin(\delta'-\delta)}$.

Il est bon d'observer aussi que le rapport de ces deux valeurs est celui du rayon à la tangente de la hauteur du pôle.

17. *On demande les réductions qui résultent, dans les formules précédentes, si, au lieu du temps du passage de la troisième étoile, on y substitue celui du passage inférieur de la première.*

Il faut remarquer d'abord que, dans la méthode du n° 10, l'observation du passage au méridien inférieur par des hauteurs correspondantes, n'est point nécessaire, parce que dans ce cas, le temps du passage supérieur étant $= t + \frac{hT}{360^\circ}$, et celui de l'inférieur

$= t' + \frac{h''T}{360^\circ}$, on aura la différence $t' - t + \frac{T}{360^\circ}(h'' - h) = \frac{1}{2}T$, et parconséquent, en faisant $180^\circ - \frac{360^\circ(t'-t)}{T} = \zeta'$, on aura $h'' = \zeta' + h$. Observons ensuite que dans la supposition actuelle, on doit faire $\delta'' = 180^\circ - \delta$ (n° 9); substituant ces valeurs de h'' et de δ'' dans l'équation finale du n° 10, on obtient, après les réductions convenables,

$$z = \frac{(h'-h)\sin\delta\cos\delta' + \frac{1}{2}\zeta'\sin(\delta'-\delta)}{\sin\delta - \sin\delta'}.$$

18. Quant aux expressions de x, et de y elles peuvent rester telles qu'elles sont (n° 11), pourvu néanmoins qu'on y mette à la place de z la valeur qu'on vient de trouver. On peut cependant leur donner une autre forme d'après la supposition actuelle, soit en combinant directement la première et la troisième des équations fondamentales du n° 10, soit en changeant immédiatement dans les valeurs de x et de y du n° 11, h' en $\zeta' + h$, et δ'' en $180^\circ - \delta$. En faisant ce calcul on trouvera

$$x = +h\sin p + \frac{z\cos p + \frac{1}{2}\zeta'\cos(p-\delta)}{\sin\delta},$$

$$y = -h\cos p + \frac{z\sin p + \frac{1}{2}\zeta'\sin(p-\delta)}{\sin\delta}.$$

19. En comparant cette méthode avec celle du n° 13, nous observerons que l'on gagne ici par rapport à l'exactitude de ζ'; car la valeur de α', qui entre dans l'expression de ζ', est de 180° dans la méthode actuelle, et par conséquent elle n'est point sujette à l'inexactitude provenante des ascensions droites données par les catalogues: la quantité ζ est la même pour les deux méthodes. Ainsi en substituant, comme ci-dessus, $180^\circ - \delta$ au lieu de δ'' dans l'expression de z du n° 14, on aura

$$z = \frac{\zeta\sin\delta\cos\delta' + \frac{1}{2}\zeta'\sin(\delta'-\delta)}{\sin\delta - \sin\delta'}.$$

Cette expression de z, et celle donnée (n° 17) sont à la vérité identiques, parce que $\zeta = h' - h$; mais la différence $h' - h$ dans le cas précédent est déduite des observations, et la quantité ζ dans le cas actuel est sujette à l'inexactitude dont nous

Digitized by Google

venons de parler. Quant aux valeurs de x et de y (n° 15), elles deviennent absolument les mêmes que celles du n° précédent.

20. Supposons enfin qu'on n'ait point observé la seconde étoile : dans ce cas, l'une et l'autre méthode ne donnent que les deux mêmes équations (n° 18), au moyen desquelles on pourra déterminer deux quelconques des trois quantités x, y, z, en supposant la troisième égale à zéro. Ainsi

$$\text{en supposant} \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \text{on aura} \begin{Bmatrix} z=-\dfrac{h\sin p\sin\delta+\frac{1}{2}C'\cos(p-\delta)}{\cos p}, y=-\dfrac{h+\frac{1}{2}C'}{\cos p}; \\ z=\dfrac{h\cos p\sin\delta-\frac{1}{2}C'\sin(p-\delta)}{\sin p}, x=\dfrac{h+\frac{1}{2}C'}{\sin p}; \\ y=-h\cos p+\dfrac{\frac{1}{2}C'\sin(p-\delta)}{\sin\delta}, x=h\sin p+\dfrac{\frac{1}{2}C'\cos(p-\delta)}{\sin\delta}. \end{Bmatrix}$$

Ce dernier cas est celui qui peut devenir souvent le plus utile dans la pratique, si toutefois l'erreur indiquée par z, et qui dépend de l'Instrument même, a été parfaitement corrigée d'avance ; alors les valeurs de x et de y serviront à le rectifier dans sa position qui peut souvent être dérangée par différentes causes; il faut cependant, pour bien faire, choisir une étoile qui soit assez éloignée du pôle pour qu'on puisse en déterminer le passage au méridien supérieur, par des hauteurs correspondantes, avec toute l'exactitude possible.

21. Lorsque cette observation nous manque, ou quand elle n'est point praticable à la rigueur, les deux équations (n° 18) peuvent néanmoins servir à déterminer deux choses, dont une est alors h, et l'autre sera l'une des quantités x, y, z, si toutefois l'on est sûr que les deux autres soient nulles; d'après cette considération, et

$$\text{en supposant} \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \cdots\cdots \text{on aura} \begin{Bmatrix} h=-\frac{1}{2}C', & z=-\frac{1}{2}C'\cos\delta, \end{Bmatrix}$$

$$\text{en supposant} \begin{Bmatrix} z=0 \\ x=0 \end{Bmatrix} \text{on aura} \begin{Bmatrix} h=-\dfrac{\frac{1}{2}C'\cos(p-\delta)}{\sin p\sin\delta}, & y=\dfrac{\frac{1}{2}C'\cot\delta}{\sin p}, \end{Bmatrix}$$

$$\text{en supposant} \begin{Bmatrix} z=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \cdots\cdots \text{on aura} \begin{Bmatrix} h=\dfrac{\frac{1}{2}C'\sin(p-\delta)}{\cos p\sin\delta}, & x=\dfrac{\frac{1}{2}C'\cot\delta}{\sin p}. \end{Bmatrix}$$

Parmi ces trois cas, le dernier présente à-la-fois le moyen le

plus exact et le plus expéditif, non-seulement pour ajuster la Lunette dans la direction du méridien, mais aussi pour déterminer le temps du passage de l'étoile par ce cercle. Soit, en effet, t le temps du passage supérieur par la Lunette, t' celui du passage inférieur, et T le temps de la révolution des fixes, comme on a $\mathfrak{C}' = 180° - \frac{360°}{T}(t'-t) = \frac{360°}{T}[\frac{1}{2}T-(t'-t)]$; en substituant cette valeur de $\mathfrak{C}'$ dans les formules du troisième cas, on aura

$$x = \frac{360°[\frac{1}{2}T-(t''-t)]\cot\delta}{2T\cos p}, \quad h = \frac{360°[\frac{1}{2}T-(t''-t)]\sin(p-\delta)}{2T\cos p\sin\delta},$$

et par conséquent le temps du passage supérieur par le méridien.

$$= t + \frac{[\frac{1}{2}T-(t''-t)]\sin(p-\delta)}{2\cos p\sin\delta}.$$

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LE CALCUL

DES ÉCLIPSES

SUJETTES AUX EFFETS DES PARALLAXES.

§ PREMIER.

Construction préliminaire.

1. Dans le calcul des phénomènes relatifs aux éclipses, dont nous allons nous occuper, nous ferons usage de la parallaxe horizontale correspondante au demi-diamètre de la Terre, dans le lieu pour lequel on fait le calcul, et de la latitude ou hauteur du pôle de ce même lieu, réduite à ce qu'elle paraîtrait étant vue de son centre, c'est-à-dire diminuée de l'angle formé par la verticale et le demi-diamètre de la Terre dans ce lieu : nous commencerons donc par le calcul de ces réductions.

2. Soit CE (fig. 1) le demi-diamètre de l'équateur, CP celui des pôles, CO celui du lieu O, OM la normale que l'on peut regarder comme le rayon de la sphère osculatrice de l'ellipsoïde terrestre au point O, et à tous ceux du parallèle qui passe par O. Il est évident que ces quatre lignes, étant vues directement du centre de la Lune, le seraient par des angles proportionnels à elles-mêmes, et que par conséquent ces angles sont les parallaxes respectives de la Lune, que nous nommerons

Digitized by Google

$\pi =$ *CE* la parallaxe équatoriale.
$\pi' =$ *CP* la parallaxe polaire.
$p =$ *OC* la parallaxe elliptique du lieu *O*.
$p' =$ *OM* la parallaxe sphérique du lieu *O*.

Si l'on mène *ON* perpendiculaire à *CP*, l'angle *MON* sera la latitude vraie du lieu *O*, que nous nommerons *L*, et l'angle $CON = P$ en sera la *latitude réduite*, par la diminution de l'angle *MOC*. Il s'agit maintenant de déterminer *P*, *p*, *p'*, au moyen de *L*, π, π'.

3. Soit *CP* : *CE*, ou $\pi' : \pi :: 1 : \rho$, $CN = x$, $ON = y$. Cela étant, les propriétés connues de l'ellipse donnent $y^2 = \pi^2 - \rho^2 x^2$, et la sous-normale $MN = \rho^2 x$. Les triangles *MON*, *CON* donnent aussi $\text{tang } L : \text{tang } P :: MN : CN :: \rho^2 : 1$; on aura donc

$$\text{tang } P = \frac{\text{tang } L}{\rho^2} = \text{tang } L - \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2}\right) \text{tang } L.$$

Mais en regardant ce dernier et petit terme comme la différence de tang *L*, et en observant que la différence d'un arc est égale à celle de sa tangente multipliée par le carré du cosinus, on aura $P = L - \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho^2} \sin L \cos L$ en parties du rayon, ou

$$\sin (L - P) = \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2}\right) \sin L \cos L = \frac{(\rho + 1)(\rho - 1)}{\rho^2} \sin L \cos L.$$

Et puisque ρ est très-peu différent de 1, on pourra substituer 2 à la place de $\frac{\rho + 1}{\rho^2}$, et on aura

$$\sin (L - P) = 2 (\rho - 1) \sin L \cos L.$$

4. On a aussi $ON = y = p' \cos L$, et $MN = p' \sin L = \rho^2 x$, ce qui donne $x = \frac{p' \sin L}{\rho^2}$, et en substituant ces valeurs dans l'équation $y^2 = \pi^2 - \rho^2 x^2$, on aura

$$p'^2 \cos^2 L = \pi^2 - \frac{p'^2 \sin^2 L}{\rho^2},$$

ou

$$\pi^2 = p'^2 \left[1 - \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \sin^2 L\right] = p'^2 [1 - 2(\rho - 1) \sin^2 L],$$

Digitized by Google

d'où l'on tire

$$p' = \pi\,[1 - 2\,(\rho - 1)\sin^2 L]^{-\frac{1}{2}} = \pi + \pi(\rho - 1)\sin^2 L.$$

On a, de plus, dans le triangle MOC, $p' : p :: \cos P : \cos L :: \cos[L - 2(\rho - 1)\sin L\cos L] : \cos L :: 1 + 2(\rho - 1)\sin^2 L : 1$, et par conséquent

$$p = \frac{\pi + \pi(\rho - 1)\sin^2 L}{1 + 2(\rho - 1)\sin^2 L} = \pi - \pi(\rho - 1)\sin^2 L;$$

d'où l'on voit que la parallaxe équatoriale π est moyenne arithmétique entre la parallaxe sphérique p' et la parallaxe elliptique p d'un lieu quelconque, et que la même quantité $\pi(\rho - 1)\sin^2 L$, ajoutée à π ou retranchée de π, donne p', ou p.

5. Ainsi, en employant la parallaxe elliptique p, et la latitude réduite P, on aura le rayon CN du parallèle terrestre qui passe par $O = p\cos P$, et la distance $CN = p\sin P$. Supposons maintenant la droite Cs dirigée à un astre infiniment éloigné du centre C de la Terre, et dont la déclinaison soit $D = ECs$; si par le point C on mène la droite CB perpendiculaire à Cs, et par les points O et N les droites OS, NT perpendiculaires à CB, et enfin Nn parallèle à CB : il est évident que de l'astre s on verra tout l'arc du méridien terrestre projeté orthographiquement sur CB, le lieu de l'observateur O en S, et le centre N de son parallèle sur le point T; et puisque $PCB = NOn = D$, on aura $CT = p\sin P\cos D$, $TS = Nn = p\cos P\sin D$, et par conséquent $CS = p\sin P\cos D - p\sin D\cos P = p\sin(P - D)$.

6. Concevons maintenant qu'on élève sur les droites CB et CP deux plans perpendiculaires au plan de la figure, que nous supposerons être celui du méridien : il est évident que l'intersection commune de ces deux plans sera une droite qui passera par le point C perpendiculairement au plan de la figure, et que leur inclinaison réciproque sera mesurée par l'angle $BCP = D$: on voit aussi que tous les points du diamètre du parallèle qui s'élève du point N perpendiculairement à NO, seront projetés sur la droite qui passe par T perpendiculairement au plan de la figure, et qui est, par conséquent, parallèle à celle qui passe par C; donc la distance de chacun de ces points à cette dernière droite est égale à $CT = p\sin P\cos D$.

Digitized by Google

7. Il est également facile de voir que la projection des points correspondans de la circonférence du parallèle sera déterminée par des lignes telles que Nn, et parallèles à Nn, lesquelles doivent varier proportionnellement à l'ordonnée du parallèle, en supposant que l'angle $NOn = D$ reste toujours le même; ainsi en nommant H l'angle horaire d'un point quelconque du parallèle, la distance de ce point au plan qui passe par CP sera $= NO \cos H = p \cos P \cos H$, et sa distance au plan du méridien sera $= NO \sin H = p \cos P \sin H$. On a pareillement la droite correspondante à $Nn = p \sin D \times \cos P \cos H$, et par conséquent la distance du point projeté sur le plan CB à l'intersection $C = p \sin P \cos D - p \sin D \cos P \cos H$. Ainsi, en supposant que ACB soit le plan de projection perpendiculaire à celui de la figure, et que CA représente la projection du méridien, si l'on conçoit que O représente un point quelconque du parallèle dont l'angle horaire soit H, la projection de ce point en S, sera déterminée par les coordonnées

$$CR = p.\sin P \cos D - p \sin D \cos P \cos H,$$

et

$$RS = p.\cos P \sin H.$$

8. Le plan de projection sépare l'hémisphère terrestre visible du centre de l'astre, auquel l'observateur attribue son propre mouvement diurne; de manière que celui-ci en arrivant au méridien fixe CA, verra l'astre dans le méridien; et quand il se trouvera dans le plan de projection, il le verra dans l'horizon. Ce dernier cas se détermine par la condition de $OS = 0$, et comme on a évidemment

$$SO = Sn + On = p \sin D \sin P + p \cos D \cos P \cos H,$$

on aura donc, lorsque l'astre sera dans l'horizon,

$$\cos H = -\tang D \tang P.$$

L'angle H sera aigu ou obtus, suivant que P et D seront de différente ou de la même dénomination; il sera positif pour le coucher de l'astre, et négatif pour son lever. Il faut observer qu'il ne s'agit point ici de l'horizon apparent perpendiculaire à OM, mais bien de l'horizon parallactique perpendiculaire à OC.

9. Comme nous aurons besoin dans la suite de la hauteur SO

de l'observateur sur le plan de projection, il est bon d'en donner ici une expression plus commode pour le calcul, et dépendante des coordonnées CR, RS et de l'angle RCS, cet angle devant servir aussi à un autre usage. Ainsi, en faisant $RCS=\mu$, $COS=\pi$, et supposant, pour abréger,

$$p\cos P.\sin H=n,\ p\sin P\cos D-p\sin D\cos P\cos H=m,$$

on aura (n° 7)

$$\text{tang}\,\mu=\frac{n}{m},\ \sin\pi=\frac{n}{p\sin\mu}=\frac{m}{p\cos\mu},\ SO=p\cos\pi;$$

cette dernière expression indique en minutes l'angle par lequel la droite SO serait vue directement du centre de la Lune; mais si l'on prend pour unité la distance de la Lune, on aura alors $SO=\sin p\cos\pi$.

10. Supposons maintenant que la déclinaison de l'astre soit variable, et que l'on veut faire le calcul pour un temps t compté depuis l'instant où la déclinaison est D (instant que nous supposons être celui de sa conjonction en ascension droite avec la Lune), la variation de l'ordonnée RS par rapport à D sera nulle, et celle de CR sera $=-dDp\,(\sin D\sin P+\cos D\cos P\cos H)$ $=dDp\cos\pi$. Désignons par d' le mouvement horaire de l'astre en déclinaison, on aura $dD=t\sin d'$, et la variation de CR sera $tp\sin d'\cos\pi$, ou bien, $d't\sin p\cos\pi$; parce que d' et p étant des arcs fort petits, on a $p\sin d'=d'\sin p$, et par conséquent, en supposant toujours $p\sin P\cos D-p\sin D\cos P\cos H=m$, on aura, pour un temps quelconque t, la coordonnée

$$CR=m-d't\sin p\cos\pi.$$

11. Jusqu'ici nous avons déterminé la position de l'observateur O, au moyen de la parallaxe elliptique p, et de sa latitude réduite P; mais il faut remarquer que cette manière n'est pas la seule; en effet, nous aurions pu nous servir également de la parallaxe sphérique p' avec la latitude L, ou même de l'une des deux autres parallaxes, l'équatoriale ou la polaire, avec une latitude réduite convenablement; il semble même, au premier abord, que chacune de ces trois manières serait préférable à celle que nous avons adoptée, parce qu'on y évite une réduction, soit de la latitude, soit de la parallaxe;

mais afin de mieux éclaircir cet objet, voyons d'abord comment chacune de ces méthodes pourrait remplacer celle que nous avons préférée. Tout se réduit à exprimer CN et NO au moyen des parallaxes susdites, parce que le reste de la projection se calcule toujours de la même manière.

12. Soit donc (fig. 1) $OM=p'$ et $MON=L$, on aura $ON=p'\cos L$, $MN=p'\sin L$, et par la propriété de l'ellipse, $MN:CN::\rho^n x:x::\rho^n:1$; donc $CN=\frac{p'\sin L}{\rho^n}$; et par conséquent (n°s 5, 7) $CR=\frac{p'\sin L\cos D}{\rho^n}$ $-p'\sin D\cos L\cos H$, $RS=p'\cos L\sin H$, et $SO=\frac{p'\sin L\sin D}{\rho^n}$ $+p'\cos L\cos H$; d'où il résulte, lorsque l'astre est dans l'horizon, $\cos H=-\frac{\tang L\tang D}{\rho^n}$, expression qui s'accorde parfaitement avec celle du n° 8, parce que $\tang P=\frac{\tang L}{\rho^n}$ (n° 3).

13. Maintenant soit décrit du centre C, avec le rayon CP, un arc de cercle qui coupe ON en e; soit menée OQ parallèle à Ce; on a, par la propriété de l'ellipse, $Ne:NO::1:\rho$, et par les triangles semblables NeC, NOQ, $Ne:NO::Ce:QO::NC:NQ$, et comme on a $Ce=CP$, on aura $OQ=CE=\pi$; faisons de plus l'angle $NOQ=l$, nous aurons

$\tang l:\tang L::NQ:NM::\rho CN:\rho^n CN$ (n° 12) $::1:\rho$, donc

$$\tang l=\frac{\tang L}{\rho}=\tang L-\frac{(\rho-1)}{\rho}\tang L,$$

et en opérant comme nous avons fait (n° 3), on aura pareillement

$$\sin(L-l)=(\rho-1)\sin L\cos L;$$

et la réduction de L en l se fera en retranchant du premier angle la moitié de celui de la verticale. Ainsi nous aurons

$$NO=\pi\cos l,\ NQ=\pi\sin l,\ \text{et}\ CN=\frac{\pi\sin l}{\rho};$$

$$CR=\frac{\pi\sin l\cos D}{\rho}-\pi\sin D\cos l\cos H,\ RS=\pi\cos l\sin H,$$

et

$$SO=\frac{\pi\sin l\sin D}{\rho}+\pi\cos l\cos D\cos H.$$

14. Si enfin l'on veut employer la parallaxe polaire $Ce=\pi'$ et la latitude réduite $CeN=QON=l$, on aura dans ce cas,

$CN = \pi' \sin l$, $Ne = \pi' \cos l$, et $NO = \rho\pi' \cos l$, d'où l'on tire

$$CR = \pi' \sin l \cos D - \pi'\rho \sin D \cos l \cos H,$$

$$RS = \pi'\rho \cos l \sin H,$$

et

$$SO = \pi' \sin l \sin D + \pi'\rho \cos l \cos D \cos H.$$

C'est de cette manière que M. Duséjour (*Traité analytique des mouvemens apparens des corps célestes. Paris*, 1786) détermine la position de l'observateur: et on voit par là, que la complication des formules de cet illustre auteur, et les calculs qu'elles exigent, encore assez longs pour décourager les calculateurs les plus infatigables, ne dépendent en aucune manière du fondement de la projection, mais bien de ce qu'on y a suivi encore les traces de l'ancienne méthode, en combinant immédiatement deux mouvemens rapportés à des plans différens; savoir, le mouvement de la Lune à l'écliptique, et celui de l'observateur ou de l'astre à l'équateur.

15. A l'égard des méthodes précédentes, il est bon d'observer 1°. que le petit avantage d'une réduction préliminaire de moins, serait assez balancé par l'introduction du nombre ρ, lequel viendrait à compliquer et à rendre difficile la solution de quelques problèmes. 2°. Que dans ces méthodes, le rayon de projection étant toujours $CO = p$, il ne pourrait pas être remplacé par la parallaxe respective de la méthode qu'on aurait employée, lorsqu'on aurait besoin de s'en servir dans la solution de quelques problèmes, ce qui montre que la méthode que nous avons adoptée est non-seulement la plus naturelle, mais qu'elle est aussi la plus simple et la plus expéditive. Quant aux réductions des formules précédentes, quoique le calcul en soit très-facile, on peut cependant l'éviter, au moyen de la Table que nous donnons, pour cet objet, à la fin de ce Mémoire

§ II.

Problème fondamental.

16. *Étant donné le temps de la conjonction en ascension droite de la Lune avec un autre astre dont la déclinaison soit peu différente; on demande la distance apparente de leurs centres pour un temps donné, peu éloigné de celui de la même conjonction.*

Nommons

T = le temps de la conjonction,

T' = le temps donné,

$t = T' - T$, réduit à l'unité de l'heure,

Θ = le temps du passage de l'astre par le méridien,

$H = T' - \Theta$, réduit en degrés,

P = la latitude réduite du lieu pour lequel on calcule,

p = la parallaxe horizontale de la Lune — celle de l'astre,

p' = la variation horaire de p.

Soit de plus pour l'instant de la conjonction,

D' = la déclinaison de la Lune,

D = la déclinaison de l'astre,

$\Delta = D' - D$,

δ = la différence entre les mouvemens horaires de la Lune et de l'astre en déclinaison,

d' = le mouvement horaire de l'astre en déclinaison,

η' = le nombre B des éphémérides correspondant à la déclinaison de la Lune,

h = (mouv. hor. de la ☾ en As. Dr. — celui de l'astre) cos D',

$\eta = B \cos D' - \frac{1}{2}\delta \sin h \operatorname{tang} D'$,

B étant ici le nombre qui, dans les Ephémérides, répond au mouvement de la Lune en ascension droite,

S = la distance appar. des centres de la Lune et de l'astre.

17. Calculons maintenant les quantités

$$n = p \cos P \sin H,$$

$$m = p \cos D \sin P - p \sin D \cos P \cos H,$$

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{n}{m},$$

$$\sin\pi = \frac{n}{p\sin\mu} = \frac{m}{p\cos\mu},$$

$$N = ht + nt^2 - n - \frac{np't}{2p},$$

$$M = \Delta - m - \frac{mp't}{2p} + \delta t + n't^2 + d't\sin p\cos\pi,$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{N}{M},$$

$$\Sigma = \frac{N}{\sin\varphi} = \frac{M}{\cos\varphi}; \text{ et nous aurons}$$

$$S = \Sigma + \Sigma\sin p\cos\pi.$$

18. *Démonstration.* Concevons d'abord qu'on ait transporté de la fig. 1 à la fig. 2 le plan de projection ACB, en y conservant la projection S de l'observateur O, déterminée par les mêmes coordonnées CR, RS; supposons ensuite qu'on ait mené par le centre L de la Lune (fig. 2) un plan $LA'C'B'$ parallèle au plan de projection ACB, lequel sera par conséquent perpendiculaire à Cs en C'; il est évident que si l'observateur en O est supposé à une distance infinie de l'astre s, il doit le voir par une droite OS' parallèle à Cs, et sa projection en S' sur le plan $LA'C'B'$ sera déterminée par les coordonnées, $C'R'$ égale et parallèle à CR, et $R'S'$ égale et parallèle à RS.

19. Mais si l'astre a une parallaxe sensible, il sera vu par une ligne $O\sigma'$ inclinée vers Cs, et l'angle $S'O\sigma'$ en sera la parallaxe en hauteur; et comme CS ou $C'S'$ est le sinus de la distance de l'astre au zénith, CO étant le rayon, en menant $\sigma\sigma'$ parallèle à $S'S$, et supposant χ la parallaxe horizontale de l'astre, on aura $S'\sigma' = S\sigma = \frac{\chi . CS}{CO} = \frac{OO' . CS}{CO}$, et par conséquent $OO' = \chi$. En prenant donc $p = CO'$, différence des parallaxes horizontales de la Lune et de l'astre, on calculera par les mêmes formules les ordonnées $C\rho$, $\rho\sigma$, qui déterminent le lieu σ' où l'astre doit être vu. Si l'astre était précisément en C', on aurait dans ce cas $CO' = 0$, et la distance vraie des astres ne serait point altérée par les parallaxes, sauf seulement le petit accroissement optique, qui provient de ce qu'elle est vue de la hauteur SO sur le plan de l'horizon ou de projection; c'est ce qui a toujours lieu pour le demi-diamètre de la Lune, en le supposant $= LC'$.

Digitized by Google

20. Nous regarderons comme fixe le méridien $C'A'$ qui passe toujours par le centre de l'astre, et le point C' en indiquera la déclinaison au moment de la conjonction; si l'astre n'est poin fixe, comme le sont les étoiles, on prendra le mouvement de la Lune à l'astre, au moyen de la différence des mouvemens horaires. Il résulte de ces suppositions, qu'en représentant par KL l'orbite relative de la Lune, le point K sera celui de son orbite réelle dans lequel elle s'est trouvée, ou doit se trouver au moment de la conjonction. Il s'agit maintenant de déterminer le point relatif L où la Lune doit se trouver dans un temps quelconque t compté depuis le moment de la conjonction.

21. Pour cela, soit la déclinaison de la Lune au point $K = D'$, son mouvement relatif en déclinaison pendant le temps $t = D''$, et en ascension droite $= A$, on aura (Trigon. sphér.)

$$\cos KL = \sin D' \sin(D' + D'') + \cos A \cos D' \cos(D' + D''), \text{ ou}$$

$$\cos KL = \sin\left(D' + \frac{D''}{2} - \frac{D''}{2}\right)\sin\left(D' + \frac{D''}{2} + \frac{D''}{2}\right) + \cos A \cos\left(D' + \frac{D''}{2} - \frac{D''}{2}\right)\cos\left(D' + \frac{D''}{2} + \frac{D''}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos D'' - \cos 2\left(D' + \frac{D''}{2}\right)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\cos D'' + \cos 2\left(D' + \frac{D''}{2}\right)\right]\left(1 - 2\sin\frac{A^2}{2}\right)$$

$$= \cos D'' - \sin^2\frac{A}{2}\left[\cos D'' + \cos 2\left(D' + \frac{D''}{2}\right)\right];$$

et comme les arcs KL, A, D'' sont petits, on anra

$$1 - \frac{KL^2}{2} = 1 - \frac{D''^2}{2} - \frac{A^2}{4}\left[1 + \cos 2\left(D' + \frac{D''}{2}\right)\right],$$

et enfin

$$KL^2 = D''^2 + A^2 \cos^2\left(D' + \frac{D''}{2}\right).$$

KL représentera donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seront $Kn = D''$, et $Ln = A\cos\left(D' + \frac{D''}{2}\right) = A\cos D'$, $- \frac{D''}{2}\sin A \cos D' \operatorname{tang} D'$. Or, par les définitions (n° 16), on a

$D'' = t$(mouv. hor. ☾ en déclin. — mouv. hor. de l'astre en déclin. $+ n't) = \delta t + n't$,

et

$A = t$ (mouv. hor. ☾ en asc. droite — mouv. hor. de l'astre en asc. droite $+ Bt$),

et par conséquent

$$A \cos D' = ht + Bt^2 \cos D',$$

et

$$-\sin A \cos D' \frac{D''}{2} \operatorname{tang} D' = -\tfrac{1}{2}\delta t^2 \sin h \operatorname{tang} D'.$$

En faisant donc, comme ci-dessus,

(mouv. hor. ☾ en asc. droite — mouv. hor. de l'astre) $\cos D' = h$,

et

$$B \cos D' - \tfrac{1}{2}\delta \sin h \operatorname{tang} D' = n,$$

on aura

$$Kn = \delta t + n't^2, \quad Ln = ht + nt^2.$$

22. Soit maintenant $S'm$ perpendiculaire à Ln, $Lm = N$, $S'm = M$, $mS'L = \varphi$, $S'L = \Sigma$, nous aurons

$$N = Ln - mn = Ln - R'S' = ht + nt^2 - n - \frac{np't}{2p},$$

$$M = R'n = C'n - C'R' = C'K + Kn - C'R'$$

$$= \Delta - m - \frac{mp't}{2p} + \delta t + n't^2 + d't \sin p \cos \pi \text{ (n° 10)},$$

en supposant que les quantités $\frac{np't}{2p}$, $\frac{mp't}{2p}$ sont les corrections de n et de m, qui résultent de la variation de la parallaxe pendant le temps t, et par conséquent $\operatorname{tang} \varphi = \frac{N}{M}$, et $\Sigma = \frac{N}{\sin \varphi} = \frac{M}{\cos \varphi}$.

Σ est donc la distance apparente des centres LS' réduite au plan de projection et telle qu'on l'observerait du point S, projection de l'observateur en O, par l'angle LSS' dont elle est la mesure; car on a fait $CO = p$, angle par lequel serait vue la même ligne CO d'une distance égale à celle de la Lune, et il est clair que toute autre ligne de la figure représentera également l'angle par lequel elle serait vue directement de cette même distance; donc Σ ou LS', qui est perpendiculaire à SS' distance sensiblement égale à celle de la Lune, sera la mesure de l'angle LSS',

Digitized by Google

distance des centres qui serait vue du point S; de même l'observateur en O doit voir la distance apparente des centres nommée S (n° 16), par l'angle LOS'; et comme lorsqu'on voit directement et de différentes distances une même ligne, les angles optiques sont en raison inverse de ces distances; nous aurons donc $S : \Sigma :: SS' : OS' :: SO + OS' : OS'$, et par conséquent

$$S = \Sigma\left(1 + \frac{SO}{OS'}\right) = \Sigma + \Sigma \sin p \cos\pi \quad \text{(n° 9)}.$$

Il est bon de remarquer que p désigne ici la parallaxe entière de la Lune: on pourrait néanmoins regarder p comme la différence des deux parallaxes, vu que celles des autres astres étant beaucoup plus petites que la parallaxe de la Lune, il n'en résulterait point d'erreur sensible.

23. *N. B.* Dans le calcul direct que l'on fait pour annoncer les éclipses, on peut négliger les petits termes nt^2, $n't^2$, $\frac{np't}{2p}$, $\frac{mp't}{2p}$, $d't \sin p \cos\pi$; ce dernier est nul de lui-même dans les éclipses des étoiles, pour lesquelles on a $d' = 0$; mais dans le calcul inverse, lorsqu'au moyen des observations on remonte à la rectification de quelques-uns des élémens donnés par les Tables de la Lune, pour en conclure la différence de la longitude des lieux où ces observations ont été faites, on ne doit rien négliger de tout ce qui peut influer, si peu que ce soit, sur l'exactitude des résultats.

24. Dans les formules précédentes et dans toutes celles qu'on verra par la suite, nous supposons les angles toujours positifs et pas plus grands que 90°. Dans le cas où ils seront négatifs ou plus grands que 90°, on suivra la règle des signes: savoir, que le sinus garde toujours le signe de l'angle, et que le cosinus, quel que soit le signe de l'angle, est positif ou négatif, suivant que l'angle est plus petit ou plus grand que 90°. Pour cela nous ne compterons les angles que jusqu'à 180° seulement, tant du côté positif que du côté négatif, puisque les angles plus grands que 180° se réduisent à leurs supplemens à 360°, avec le signe contraire: ainsi, par exemple, l'angle $+285°$ marque dans la circonférence du cercle le même point que l'angle $-75°$, et l'angle $-285°$ le même que $+75°$.

Digitized by Google

25. Nous supposons aussi, que la hauteur du pôle P, et les déclinaisons D, D' sont positives si elles sont boréales, et négatives si elles sont australes; les mouvemens horaires en déclinaison seront pareillement positifs ou négatifs, suivant qu'ils feront avancer l'astre vers le nord ou vers le sud; les angles μ et φ auront le signe du numérateur de l'expression de leurs tangentes respectives, et chacun d'eux sera aigu ou obtus, suivant que le dénominateur de son expression sera positif ou négatif; π sera toujours positif et pas plus grand que 90°; le temps t sera supposé négatif avant la conjonction, et positif après; l'angle H sera pareillement négatif avant le passage de l'astre par le méridien, et positif après; mais il devient inutile, lorsqu'il est plus grand que l'arc demi-diurne, déterminé par l'équation $\cos H = -\text{tang} P \text{ tang} D$ (n° 8), parce que l'astre se trouve alors sous l'horizon.

26. Comme l'angle H est donné en temps, et qu'il faut le réduire en degrés, et quelquefois en arc rectifié ou en parties du rayon, supposons pour cela, la révolution diurne de l'astre en temps moyen et réduit à l'unité de l'heure $= r$, l'expression $\frac{360^\circ}{r} = \gamma$, et $2 \times \frac{3,14159265}{r} = \gamma'$; alors γt sera l'angle horaire correspondant au temps t, réduit à l'unité du degré, et $\gamma' t$ sera le même angle réduit à l'unité du rayon. Le logarithme de 360° est 2,5563025, et celui de $6,2831853 = 0,7981799$. Pour les étoiles, on a $r = 23^h,93447$, et, dans ce cas, $\log \gamma = 1,1772786$, $\log \gamma' = 9,4191560$. Le temps de la révolution des autres astres, et même de celle du Soleil, se trouve par les Éphémérides, en comparant deux passages successifs (le précédent et le suivant) par le méridien; mais comme les calculs des Éphémérides sont faits pour le temps moyen, si l'on veut le réduire en temps vrai, la révolution du Soleil en temps moyen étant toujours ρ, et celle d'un autre astre $= r$, on devra faire $\frac{\rho . 360^\circ}{24 . r} = \gamma$ et $\frac{\rho . 6,2831853}{24 . r} = \gamma'$, afin que γ, γ' correspondent à une heure de temps vrai. Si l'astre est le Soleil lui-même, on aura $r = \rho$, $\gamma = 15^\circ$, et $\log \gamma' = 9,4179687$; mais pour les étoiles, les valeurs de γ, γ' ne seraient plus constantes, ni telles que nous venons de les calculer ci-dessus, que pour les jours où le jour vrai se trouve égal au jour moyen. Il faut observer, qu'en pareil cas, on doit réduire aussi les mou-

Digitized by Google

vemens horaires de la Lune, parce que l'Éphéméride ne les donne pas pour l'heure correspondante du temps vrai, mais bien pour l'heure toujours constante du temps moyen.

27. *Exemple.* Afin de comparer le résultat de notre solution avec celui de M. Du Séjour, nous allons l'appliquer au même exemple dont il s'est servi, c'est-à-dire à l'éclipse du Soleil du 1er avril 1764, et déterminer quelle a dû être la distance apparente des centres à $9^h\ 4'\ 33''$ de temps vrai à Londres par 51° 31′ de latitude boréale. En supposant comme lui l'ellipticité de la Terre $\frac{1}{177}$, et la parallaxe polaire de la Lune $54'\ 1'',5$, j'en déduis sa parallaxe à l'équateur $54'\ 19'',8$ (n° 3), et à Londres $54'\ 2'',5$ (n° 4); si l'on en retranche $10''$ pour la parallaxe du Soleil, on aura $p = 53'\ 58'',5 = 53',975$, et la latitude réduite $P = 51°\ 12'\ 7''$. Supposant, de plus, avec le même auteur, l'uniformité du mouvement de la Lune, et négligeant par conséquent la variation de la parallaxe et celle de la déclinaison du Soleil, nous ferons dans nos formules $d' = 0$, $p' = 0$, $n' = 0$. Pour ce qui regarde la valeur de $n = B\cos D' - \frac{1}{2}\delta \sin h \tang D'$, nous en négligerons seulement le terme $B\cos D'$, en conservant l'autre, quoique très-petit. M. Du Séjour a négligé pareillement dans ses formules un terme analogue, en multipliant la différence des mouvemens horaires en longitude par le cosinus de la latitude de la Lune dans la conjonction, au lieu du cosinus de la latitude correspondante à la moitié de l'intervalle entre la conjonction et le temps proposé, et dans le cas présent, ce dernier terme est plus petit que l'autre de $\frac{1}{36}$.

28. Ainsi, en employant les élémens donnés par cet auteur (page 5), on trouve la conjonction en ascension droite à $11^h\ 0'\ 9'',3$, et pour le même instant, $D' = 5°\ 34'\ 22'',6$, $D = 4°\ 49'\ 31'',2$, $\Delta = 44'\ 51'',4 = 44',857$; ainsi que le mouvement horaire en ascension droite pour la Lune $= 26'\ 20'',4$, et pour le Soleil $= 2'\ 16'',4$; mouvement horaire en déclinaison pour la Lune $= 14'\ 6'',1$, et pour le Soleil $= 57'',7$. On tire de là $\delta = 13',140$, $h = 23',953$, $n = -0',0045$; et comme pour le temps donné on a $H = -43°\ 51^t\ 45''$ et $t = -1^h,92675$, nous aurons $n = -23',436$, $m = 39',866$, $\mu = -30°\ 27'$, $\pi = 58°\ 58'$, $ht = -46',151$, $nt^2 = -0',017$, $\delta t = -25',318$, $N = -22',732$, $M = -20',327$,

$\varphi = -131^\circ\,48'\,10''$, $\Sigma = 30',494$, $\Sigma \sin p \cos\pi = 0',248$, et enfin $S = 30',742 = 30'\,44'',52$.

Quoique M. Du Séjour (page 29) donne en nombre rond $45''$, il résulte de son calcul même $44'',53$; mais cette coïncidence n'est cependant que casuelle, car il devrait y avoir quelque différence provenante de ce qu'il a employé la déclinaison du Soleil correspondante à l'instant de la conjonction en longitude, au lieu que nous nous sommes servis de celle qui correspond à celui de la conjonction en ascension droite.

29. Il est bon de remarquer que dans les expressions de M et de N (n° 17), on aurait pu se passer de calculer séparément les petits termes nt^2, $n't^2$, etc., sans cependant négliger leurs effets. Pour cela il faudrait employer dans le calcul de m, au lieu de la déclinaison de l'astre correspondante à l'instant de la conjonction, celle qui répond au temps T'; et dans le calcul de m et de n, se servir de la parallaxe correspondante à la moitié de l'intervalle entre la conjonction et le temps T'; on calculerait pareillement les mouvemens horaires, pour ce même instant $T+\frac{t}{2}$, et multipliant leur différence en ascension droite par le cosinus de la déclinaison de la Lune correspondante à ce même temps, on aurait $N = ht - n$, $M = \Delta + \delta t - m$. Mais ce procédé, qui paraît fort avantageux quand il s'agit de faire le calcul pour un seul instant, cesserait de l'être lorsqu'il faudrait le répéter pour plusieurs instans différens, parce qu'on serait obligé de calculer, pour chacun d'eux, les valeurs correspondantes de h et de δ.

30. Comme dans les calculs que nous aurons à exécuter sur l'éclipse qui nous sert d'exemple, on emploiera souvent certaines quantités constantes, il est bon d'en calculer d'avance, et pour une seule fois, les valeurs numériques. Faisons donc

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C} = p\cos D\sin P, \\ q = p\sin D\cos P, \\ g = p\cos P, \end{array}\right\} \text{ on aura (n° 17) } \left\{\begin{array}{l} m = \mathfrak{C} - q\cos H, \\ n = g\sin H, \end{array}\right\} \text{ et (n}^{os}\text{ 27, 28)}$$

$$\mathfrak{C} = 41',917, \quad \log g = 1,529199, \quad \log h = 1,379358,$$
$$\log q = 9,454090, \quad \log \delta = 1,118595.$$

§ III.

Du calcul direct des Éclipses pour des lieux déterminés.

31. *Étant donné le temps de la conjonction vraie en ascension droite de la Lune avec un astre quelconque; déterminer le temps de la conjonction apparente, et la différence apparente des déclinaisons.*

En conservant les définitions de P, p, T, Θ, D, D', Δ, h, δ (n° 16), de γ (n° 26), et celles de ξ, g, q (n° 30), soit, de plus, le temps cherché de la conjonction apparente $= T+\tau$, et la différence apparente des déclinaisons $= \Delta'$. Cela étant, faisons $\gamma(T-\Theta)=H$, et on aura d'abord

$$\tau = \frac{\xi}{h}\sin(H+\gamma\tau);$$

puis, calculant les valeurs successives de

$$\theta = \frac{\xi}{h}\sin H, \theta' = \frac{\xi}{h}\sin(H+\gamma\theta),\ \theta'' = \frac{\xi}{h}\sin(H+\gamma\theta'),$$

on aura

$$\tau = \theta'' + \frac{(\theta''-\theta')^2}{2\theta'-(\theta+\theta'')}.$$

Si l'on fait ensuite $\zeta - q\cos(H+\gamma\tau)=m'$, on aura

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau - m'.$$

32. *Démonstration.* Comme la conjonction vraie a lieu dans le temps T, lorsque la Lune passe en K (fig. 3), par le méridien fixe CK, et que la conjonction apparente ne doit arriver qu'au moment $T+\tau$ et lorsque la Lune et l'astre paraissent ensemble dans le méridien apparent SL, τ étant le temps écoulé depuis la conjonction vraie jusqu'à l'apparente, et représentant par Le l'espace relatif décrit par la Lune pendant cet intervalle dans le sens du parallèle, on aura $Le = h\tau$. Mais on a aussi pour l'instant de la conjonction apparente, l'angle horaire de l'astre $= \gamma(T+\tau-\Theta) = H+\gamma\tau$,

Digitized by Google

puisqu'on a fait $\gamma(T-\Theta)=H$, on aura donc encore $Le=g\sin(H+\gamma\tau)$ (n°s 7, 30), et partant

$$\tau=\frac{g}{h}\sin(H+\gamma\tau).$$

33. La résolution de cette équation est fondée sur la règle de fausse position. En prenant pour première hypothèse θ, déterminé par la supposition de $\tau=0$, on aura un premier résultat θ', au lieu de θ, et dont l'erreur sera $\theta'-\theta$; prenons pour seconde hypothèse θ', et soit θ'' le résultat correspondant, $\theta''-\theta'$ sera l'erreur de cette hypothèse; si l'on fait maintenant cette proportion, la différence des erreurs $2\theta'-(\theta+\theta'')$ est à la différence des hypothèses $\theta'-\theta$, comme la seconde erreur $\theta''-\theta'$ est à la correction de la seconde hypothèse, on aura

$$\tau=\theta'+\frac{(\theta'-\theta)(\theta''-\theta')}{2\theta'-(\theta+\theta'')};$$

ou bien, en mettant $\theta''-(\theta''-\theta')$ à la place de θ',

$$\tau=\theta''+\frac{(\theta''-\theta')^2}{2\theta'-(\theta+\theta'')}.$$

34. Si l'on veut avoir plus d'exactitude, on cherchera encore un troisième résultat θ''', et supposant que θ' indique la première et θ'' la seconde hypothèse, on aura pareillement

$$\tau=\theta'''+\frac{(\theta'''-\theta'')^2}{2\theta''-(\theta'+\theta''')};$$

mais en se bornant seulement au calcul de θ et θ', ce qui suffit pour les annonces ordinaires, la formule se réduit alors à

$$\tau=\theta'+\frac{(\theta'-\theta)^2}{2\theta-\theta'}.$$

On pourra comprendre aussi dans ce même calcul la correction due au mouvement horaire de la Lune (n° 22); et en faisant $Le=h\tau+n\tau^2$, on aura alors $\tau=\frac{g\sin(H+\gamma\tau)}{h+n\tau}$, qu'on peut résoudre de la même manière, en supposant d'abord $\theta=\frac{g\sin H}{h}$, puis $\theta'=\frac{g\sin(H+\gamma\theta)}{h+n\theta}$, etc.

Digitized by Google

La différence apparente des déclinaisons Δ' est représentée (fig. 3) par $SL = LR - SR = Ce - SR$. Mais l'on a $Ce = \Delta + \delta\tau$, et $SR = 6 - q\cos(H + \gamma\tau) = m'$ (n°s 7, 30, 31); donc

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau - m'.$$

35. *Exemple.* Dans la même éclipse de 1764, pour laquelle nous avons trouvé (n°s 27, 28)

$$\left\{\begin{array}{llll} P = 51^{\circ}\ 12'\ 7'', & h = 23',953, & \delta = 13',14, & T = 11^{h}\ 0'\ 9'',3 \\ p = 53',975, & n = -0',0045, & \Delta = 44',857, & \end{array}\right\}$$

on a aussi $H = -14^{\circ}\ 57'\ 40''$, d'où il résulte $\theta = -0^{h},36453$, $\theta' = -0^{h},49283$, $\theta'' = -0^{h},53697$, $\theta''' = -0^{h},55202$, et par conséquent $\tau = -0^{h},55981$. En se bornant seulement aux trois premiers résultats, on a $\tau = -0^{h},56012$, dont la différence n'est que de $0^{h},00031$, ou $1'',1$; si l'on n'emploie que les deux premiers, on trouve $\tau = -0^{h},56251$, avec une erreur de $0^{h},0027 = 9'',7$. Ainsi, en prenant la valeur de $\tau = -0^{h},55981$, nous aurons $T + \tau = 10^{h}\ 26'\ 34''$, $H + \gamma\tau = -23^{\circ}\ 21'\ 30''$, et partant $\delta\tau = -7',356$, $m' = 39',305$ et $\Delta' = -1',804$.

36. *Étant donné le temps de la conjonction apparente, et la différence apparente des déclinaisons, trouver la plus courte distance des centres, l'instant de cette phase, et sa grandeur ou la quantité de l'éclipse.*

Faisant, pour abréger, le temps donné de la conjonction apparente $T + \tau = T'$, l'angle horaire $H + \gamma\tau = H'$, et conservant de plus les définitions de h, δ, γ', g, q (n°s 16, 26, 30), on calculera les quantités

$$h' = h - \gamma' g\cos H', \quad \delta' = \delta - \gamma' q\sin H', \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\delta'}{h'},$$

et on aura
$$\left\{\begin{array}{l} \text{plus courte dist. des cent.} = \Delta'\cos\alpha', \\ \text{temps de cette phase} = T' - \dfrac{\Delta'\sin\alpha'\cos\alpha'}{h'}. \end{array}\right.$$

Pour qu'une éclipse d'étoile soit possible, il faut que la plus courte distance des centres soit plus petite que le demi-diamètre de la Lune, ou plus petite que la somme des demi-diamètres

Digitized by Google

des deux astres pour une éclipse de Soleil : dans ce dernier cas, nommant E la différence entre la somme des demi-diamètres et la plus courte distance des centres, et s le demi-diamètre du Soleil, la quantité de l'éclipse sera de $\frac{6}{s} E$ *doigts*, boréale ou australe, selon que Δ' sera positif ou négatif.

37. *Démonstration.* Concevons, que, depuis l'instant de la conjonction apparente en SL (fig. 3), l'astre S reste immobile, et rapportons à la Lune son mouvement en sens contraire, c'est-à-dire, que le point L soit doué du mouvement relatif et apparent de la Lune. Comme pendant le temps τ les mouvemens de la Lune sont

$\delta\tau + n'\tau^2$ ..... parallèlement à CK,
$h\tau + n'\tau^2$ ..... perpendiculairement à CK :

en différentiant ces expressions, on aura les vîtesses de la Lune suivant les mêmes directions

$$\delta d\tau + 2n'\tau d\tau, \quad \text{et} \quad h d\tau + 2n\tau d\tau;$$

mais comme l'astre S a lui-même, suivant ces directions, les mouvemens

$$\mathfrak{C} - q\cos H', \quad \text{et} \quad g\sin H',$$

différentiant pareillement ces quantités, et observant que..... $dH' = \gamma' d\tau$, on aura les deux vîtesses de l'astre

$$\gamma' q d\tau \sin H', \qquad \gamma' g d\tau \cos H';$$

donc, en retranchant les vîtesses de S des vîtesses correspondantes de L, on aura les vîtesses apparentes de la Lune

$\delta d\tau + 2n'\tau d\tau - \gamma' q d\tau \sin H'$, parallèlement à CK, et
$h d\tau + 2n\tau d\tau - \gamma' g d\tau \cos H'$, perpendiculairement à CK.

38. Si maintenant on suppose $n = 0$, $n' = 0$, $d\tau = 1$, les deux mouvemens horaires apparens du point L seront $\delta - \gamma' q \sin H'$, $h - \gamma' g \cos H'$; et en les désignant par δ', h', si l'on fait, de plus, $\frac{\delta'}{h'} = \text{tang}\,\alpha'$, α' sera l'inclinaison de l'orbite apparente LP par rapport à Le. Baissons Sp perpendiculairement à LP, Sp représentera la plus courte distance des centres, et l'instant de

cette phase sera celui du passage de la Lune par p; puisqu'on a aussi $SL = \Delta'$, $LSp = \alpha'$, et par conséquent $Sp = \Delta' \cos \alpha'$, $pL = \Delta' \sin \alpha'$; et que d'ailleurs le mouvement horaire dans la direction pL est $= \frac{h'}{\cos \alpha'}$, on aura donc le temps employé à décrire $pL = \frac{\Delta' \sin \alpha' \cos \alpha'}{h'}$, et par conséquent le temps cherché de la plus courte distance $= T' - \frac{\Delta' \sin \alpha' \cos \alpha'}{h'}$.

39. Il est évident que si la plus courte distance des centres est plus grande que le demi-diamètre de la Lune, ou que la somme des demi-diamètres du Soleil et de la Lune, il ne saurait y avoir d'éclipse d'étoile, dans le premier cas, ni de Soleil dans le second; lorsque la plus courte distance est égale à la somme des demi-diamètres, l'éclipse se réduit à un simple contact des disques; si elle est moindre, il y aura une éclipse, et d'autant plus grande que la distance elle-même sera plus petite. Il est pareillement évident, que dans les éclipses de Soleil, la différence entre la somme des demi-diamètres et la plus courte distance des centres, donne précisément la plus grande phase ou la plus grande portion du disque du Soleil que la Lune peut cacher : or, comme on est dans l'usage de partager le diamètre du Soleil en douze parties égales qu'on appelle *doigts*, et par conséquent le demi-diamètre en six; nommant s ce demi-diamètre, E l'excès entre la somme des demi-diamètres des deux astres, et la plus courte distance de leurs centres, on aura la quantité de l'éclipse $= \frac{6}{s} E$ *doigts* vers le Nord ou vers le Sud, suivant que la Lune sera au Nord ou au Sud du Soleil, et ces positions sont d'ailleurs indiquées par le signe de Δ', que nous supposons positif dans le premier cas, et négatif dans le second.

40. *Exemple.* Dans le même cas de l'exemple précédent, on a

$\Delta' = -$	$1',804$,	$h = 23',953$,	$\log g = 1,529199$,
$T' =$	$10^h\ 26'\ 34''$,	$\delta = 13',14$,	$\log q = 0,454090$,
$H' = -$	$23^\circ\ 21'\ 30''$,		$\log \gamma' = 9,417969$;

on conclut de ces données,

$$h' = 15',824, \qquad \delta' = 13',435, \qquad \alpha' = 40^\circ\ 19'\ 55''$$

la plus courte distance $= -1',375$, et le temps de cette distance à $10^h\ 29'\ 56'',5$. En supposant aussi la somme des demi-diamètres $= 30',718$ et $s = 15',933$, on aura $E = 29',345$, et la quantité de l'éclipse $= 11,05$ *doigts* vers le Sud.

41. Il faut cependant observer, que la plus courte distance calculée de cette manière, n'est que la distance réduite projetée sur le plan de projection, et qu'il y manque l'accroissement optique provenant de la hauteur de l'observateur sur le même plan, ainsi que l'augmentation du demi-diamètre horizontal de la Lune, due à la même cause. Le demi-diamètre du Soleil doit être augmenté aussi par la même raison; cependant, comme cet accroissement est à celui du demi-diamètre de la Lune comme la parallaxe du Soleil est à celle de la Lune, la quantité $0'',04$, qui en résulte, est physiquement insensible.

42. Ainsi, pour que le calcul précédent soit tout-à-fait exact, il faudra calculer d'abord l'angle π (n° 9) pour le temps de la plus courte distance (n° 56); et supposant ensuite le demi-diamètre horizontal de la Lune $= \sigma$, $1 + \sin p \cos\pi = k$, et la quantité de l'éclipse $= d$ *doigts*, nous aurons exactement

$$d = \frac{6(k\cdot + s - k\Delta'\cos\alpha')}{s}.$$

Soit $s' = \frac{s}{k} = s - s\sin p\cos\pi$, on aura

$$d = \frac{6(\cdot + s' - \Delta'\cos\alpha')}{s'}.$$

Il est bon de remarquer, que le numérateur de d devant toujours représenter la différence entre $\sigma + s'$ et $\Delta'\cos\alpha'$, il faut que ces deux quantités aient à-la-fois le même signe, et par conséquent lorsque $\Delta'\cos\alpha'$ est négatif, d le sera aussi et représentera alors le nombre de *doigts* éclipsés du côté austral.

43. Lorsqu'on a observé dans l'immersion et l'émersion des étoiles, la distance apparente $S = k\sigma$, on voit que, sans aucun autre calcul, on peut la réduire au plan de projection, en faisant $\Sigma = \sigma$; pareillement, pour le commencement et la fin des éclipses de Soleil, et lors des contacts intérieurs, s'ils ont lieu, on a $S = s \pm \sigma k$,

Digitized by Google

et par conséquent

$$\Sigma = \frac{s}{k} \pm \sigma = s' \pm \sigma.$$

Nous remarquerons enfin que dans les Ephémérides de Coimbre, vol. I, page 232, au lieu de γ' (n° 26), nous avons mis sin 15″,2, dont le logarithme 9,4186215 tient le milieu entre les deux logarithmes de γ' correspondans, l'un aux éclipses de Soleil, et l'autre à celles d'étoile, et cela, parce que dans les annonces de ces phénomènes on n'a pas besoin d'une très-grande précision.

44. *Etant donné le temps* T′ *de la conjonction apparente, et la différence apparente des déclinaisons* Δ', *déterminer le temps où la distance des centres sera* Σ, *et en particulier le temps du commencement et de la fin de l'éclipse.*

Soit $T'+t$ le temps cherché, les quantités h', α', les mêmes que dans le problème précédent, et faisant de plus $\cos\phi' = \frac{\Delta' \cos\alpha'}{\Sigma}$, on aura

$$t = \frac{\Sigma \sin(\pm\phi' - \alpha')}{h'}.$$

Soient t, t' les valeurs correspondantes à $-\phi'$, $+\phi'$, sera t un temps antérieur à la plus courte distance, et t' un temps postérieur. On calculera ces deux valeurs, en prenant d'abord pour Σ soit le demi-diamètre horizontal de la Lune s'il s'agit d'une éclipse d'étoile, soit la somme des demi-diamètres si c'est une éclipse de Soleil ; le temps du commencement sera $T'+t$, et celui de la fin $T'+t'$. Ensuite substituant pour Σ la différence des demi-diamètres, on aura les temps des contacts intérieurs, et ces contacts n'auront lieu que lorsque cette différence sera plus grande que la plus courte distance des centres. On prendra ϕ', aigu ou obtus, suivant que Δ' sera positif ou négatif.

45. *Démonstration.* La construction de l'orbite apparente (fig. 3) étant supposée, si l'on mène de l'astre S les droites SP, SF égales entre elles et à la distance apparente des centres Σ;

Digitized by Google

puisqu'on a (n° 38) $SL = \Delta'$, $LSp = \alpha'$ et $Sp = \Delta' \cos \alpha'$, en faisant $FSp = \varphi'$, on aura $\cos \varphi' = \frac{\Delta' \cos \alpha'}{\Sigma}$, $FSL = \varphi' - \alpha'$, et $Fg = \Sigma \sin (\varphi' - \alpha')$; et comme le mouvement horaire apparent parallèle à Fg est $= h'$ (n° 38), on aura le temps depuis L jusqu'à $F = \frac{\Sigma \sin (\varphi' - \alpha')}{h'}$. Or l'angle φ' déterminé par son cosinus, peut être positif ou négatif; donc on aura en général

$$t = \frac{\Sigma \sin (\pm \varphi' - \alpha')}{h'}.$$

On voit aussi qu'on doit prendre $-\varphi'$ pour le temps antérieur depuis P jusqu'à L, et $+\varphi'$ pour le temps postérieur depuis L jusqu'en F: il faut cependant remarquer que dans les éclipses de peu de durée où φ' est moindre que α', ces deux temps peuvent être à-la-fois antérieurs ou postérieurs à celui de la conjonction apparente; antérieurs, si α' est positif de lui-même; postérieurs, lorsqu'il est négatif. Néanmoins $-\varphi'$ servira toujours pour le commencement de l'éclipse et $+\varphi'$ pour la fin; lorsque $\varphi = 0$, les deux temps coïncideront en un seul, et l'éclipse se réduira dans ce cas à un contact simple et instantané.

46. *Exemple.* En continuant le calcul de la même éclipse proposée, où nous avons (n° 40) $\Delta' = -1',804$, $T' = 10^h\ 26'\ 34''$, $h' = 15',824$, $\alpha' = 40°\ 19'\ 55''$, et, supposant de plus la somme des demi-diamètres $\Sigma = 30',718$, on trouve $\varphi' = \pm 92°\ 33'\ 57''$, $t = -1^h,4221$ et $t' = 1^h,5347$; et par conséquent à Londres le commencement de l'éclipse a été à $9^h\ 1'\ 14''$, et la fin à $11^h\ 58'\ 59''$.

Les temps que nous venons de trouver par ce premier calcul sont assez exacts pour les petites éclipses, et même pour les annonces ordinaires de toutes; mais il n'en est pas ainsi des grandes, comme celle de notre exemple, et dans ce cas, lorsqu'on veut plus d'exactitude, il faut répéter le calcul, ainsi que nous le ferons voir n° 52.

47. *On demande la réduction du demi-diamètre du Soleil (dans l'éclipse de cet astre) pour chacun des temps calculés dans*

Digitized by Google

le problème précédent, la différence apparente des déclinaisons, et les points du disque du Soleil, où se feront les contacts; ou ceux de la Lune, par lesquels doit entrer ou sortir l'étoile, ou la planète éclipsée.

Avec l'angle horaire $H'+\gamma t$ du commencement de l'éclipse, on calculera les quantités $n=g\sin(H'+\gamma t)$, $m=\mathfrak{G}-q\cos(H'+\gamma t)$, tang $\mu=\frac{n}{m}$, $\sin\pi=\frac{n}{p\sin\mu}$; et avec l'angle horaire $H'+\gamma t'$ de la fin, on calculera de même les quantités correspondantes n', m', μ', π'. Cela posé, soit le demi-diamètre du Soleil $=s$, et son demi-diamètre réduit $=s'$, nous aurons d'abord,

pour le commencement.. $s'=s-s\sin p\cos\pi$,
et pour la fin..... $s'=s-s\sin p\cos\pi'$.

48. Ensuite, nommant τ le temps connu depuis la conjonction vraie jusqu'à la conjonction apparente (n° 31), et faisant

$$M=\Delta+\delta'(\tau+t)-m, \quad M'=\Delta+\delta'(\tau+t')-m',$$

les quantités M, M' seront les différences cherchées des déclinaisons apparentes. Soit enfin

$$\cos\Phi=\frac{M}{\Sigma}, \quad \cos\Phi'=\frac{M'}{\Sigma},$$

les angles $\mu-\Phi$, $\mu'-\Phi'$ détermineront les points du disque du Soleil où se feront les contacts, ou ceux de la Lune par lesquels doit entrer ou sortir l'étoile ou la planète éclipsée.

Les angles Φ, Φ' sont supposés d'eux-mêmes positifs après la conjonction apparente, et négatifs avant, aigus ou obtus, suivant que les numérateurs M, M' seront positifs ou négatifs; les angles $\mu-\Phi$, $\mu'-\Phi'$ seront comptés, dans les éclipses de Soleil, à partir du point le plus haut du disque de cet astre vers l'occident, s'ils sont positifs, et vers l'orient quand ils sont négatifs. Dans les éclipses d'étoiles ou de planètes, ces angles doivent être comptés du point le plus bas de la Lune vers l'orient, s'ils sont positifs, et vers l'occident quand ils sont négatifs. Dans les Ephémérides de Coimbre, on prend leurs supplémens, afin de les compter aussi du point le plus haut du disque de la Lune.

49. *Démonstration.* Tout ceci se trouve déjà compris dans les démonstrations précédentes, à l'exception de ce qui regarde les angles $\mu - \Phi$, $\mu' - \Phi'$. Supposons donc qu'à la fin de l'éclipse l'astre se trouve réellement en s (fig. 3), il est aisé de voir qu'en menant vers l'orbite vraie, représentée par KF', la droite $sF' = \Sigma$, le centre de la Lune se trouvera en F', et que sF' sera la ligne des centres dont on demande la position par rapport au cercle vertical. Soit menée du centre C de la projection la droite Cs; cette ligne sera la projection du vertical qui passe par le centre de l'astre; quant à celle du vertical qui passe par le centre de la Lune F', on peut la représenter par la droite $F't$ parallèle à Csm, en raison de la proximité de ces deux astres : donc l'éclipse de Soleil, si sn en représente le demi-diamètre, finira lors du contact au point n, la ligne des centres faisant avec la verticale du point le plus haut m, l'angle nsm vers l'orient. S'il s'agit d'une étoile éclipsée, représentant par sF' le demi-diamètre de la Lune, l'étoile en quittera le disque par le point s, la ligne des centres faisant avec la verticale du point le plus bas t, l'angle $tF's = msn$ vers l'occident.

50. Comme l'on a $msn = nsE - msE$, et que $nsE = \Phi'$ (n° 22), et $msE = \mu'$ (n° 9), il s'ensuit que l'angle $\mu' - \Phi' = msn$ est négatif dans le cas représenté par la construction de la figure, c'est-à-dire, en supposant que les angles négatifs se comptent à partir du point le plus bas de la Lune vers l'occident dans les éclipses d'étoiles, et du point le plus haut du Soleil vers l'orient dans les éclipses de Soleil, et réciproquement. On doit entendre la même chose à l'égard de l'angle $\mu - \Phi$, pourvu qu'on fasse attention au signe et à l'espèce des angles μ, Φ (n°s 25, 48). Lorsque $\mu - \Phi$, ou $\mu' - \Phi'$ seront plus grands que 180°, il faudra en prendre les supplémens avec le signe contraire, et suivre pour le reste la même règle.

51. *Exemple.* Ainsi nous aurons, lors du commencement de notre éclipse,

$H' = -23^\circ\,21'\,50''$, $\gamma t = -21^\circ\,20'\,8''$, $H' + \gamma t = -44^\circ\,41'\,38''$,
$\tau + t = -1^h,9819$, $n = -23',788$, $m = 39',895$, $\mu = -30^\circ\,48'$,
$\pi = 59^\circ\,23'$, réduction du demi-diamètre $\odot = -0',127$,
$M = -21',080$, $\Phi = -133^\circ\,33'$, et $\mu - \Phi = +102^\circ\,45'$;

Digitized by Google

c'est l'angle que fait vers l'occident la ligne des centres avec la verticale menée par le point le plus haut du Soleil, lors du contact.

Pour la fin de l'éclipse, nous trouvons pareillement..... $H' + \gamma t' = -0^{\circ}\,20'\,16''$, $\tau + t' = 0^{h},9749$, $n' = -0',1994$, $m' = 39',079$, $\mu' = -0^{\circ}\,17'$, $\pi' = 46^{\circ}\,23'$, réduct. du demi-diamètre $\odot = -0',173$, $M' = +18',588$, $\Phi' = +52^{\circ}\,22'$, et $\mu' - \Phi' = -52^{\circ}\,39'$, ce qui détermine le point de contact vers l'orient.

52. *Déterminer plus exactement les temps du commencement et de la fin des éclipses.*

L'inexactitude des temps calculés de la manière exposée ci-dessus (n° 44), vient de ce qu'on y a supposé que la vîtesse et la direction du mouvement apparent du point L (fig. 3) sont constamment les mêmes pendant toute la durée de l'éclipse depuis P jusqu'à F; or il est évident, que cela nepeut être sensiblement exact que dans les éclipses de peu de durée. Dans celles au contraire qui sont de longue durée, comme dans l'éclipse de notre exemple, il doit résulter de ces suppositions des erreurs tant soit peu considérables; car, quoique le mouvement de la Lune dans son orbite réelle LF' soit à-peu-près uniforme, il n'en est pas ainsi pour son mouvement apparent de L à F, parce que ce dernier se combine avec le mouvement de l'astre de S à s, lequel ne doit être regardé comme uniforme que pendant un temps très-court. Supposons donc que le mouvement apparent suivant LF, au lieu d être uniforme, soit uniformément accéléré ou retardé; il est démontré que le temps nécessaire pour décrire LF sera le même que le temps employé à décrire uniformément ce même espace, avec la vîtesse acquise pendant la moitié de ce temps; et cette supposition, dont nous pouvons maintenant faire usage, après avoir déjà déterminé les temps d'une manière approchée, nous fournira des résultats aussi exacts qu'on peut le desirer dans la pratique.

53. Il y a encore dans la méthode du n° 44 un autre principe inexact, particulièrement pour les éclipses de Soleil; il consiste

dans la supposition de Σ égal à la somme des demi-diamètres horizontaux; or nous avons fait voir (n° 43) que le demi-diamètre du Soleil doit être corrigé; mais l'on ne pouvait pas non plus introduire dans le premier calcul une correction qui dépend des temps mêmes qu'on y cherchait à déterminer. Maintenant que nous avons trouvé, par le problème précédent, les réductions $-0',127$, $-0',173$, en supposant aussi la somme des demi-diamètres horizontaux $= 30',621$, nous aurons pour le commencement de l'éclipse $\Sigma = 30',494$, et pour la fin $\Sigma = 30',448$. Ainsi, il n'y a qu'à répéter le calcul du n° 44 séparément pour chacun des temps en substituant au lieu de H, dans les calculs de h', δ', α', la quantité $H' + \frac{1}{2}\gamma t$ pour le commencement de l'éclipse, et $H' + \frac{1}{2}\gamma t'$ pour la fin.

54. *Exemple.* Ayant donc ainsi pour le commencement de notre éclipse, $\Sigma = 30',494$, $H' + \frac{1}{2}\gamma t = -34^\circ\ 1'\ 34''$ (n° 51); si de plus l'on a égard à la petite quantité $2n\tau$ (n° 37), laquelle devient dans ce cas $2n(\tau + \frac{1}{2}t) = +0',011$ (n°s 28, 35, 46), on trouvera $h' = 16'.626$, $\delta' = 13',557$, $\alpha' = 39^\circ\ 11'\ 40''$, $\varphi' = -92^\circ\ 37'\ 40''$, et $t = -1^h,36683 = -1^h\ 22'\ 0'',6$: d'où l'on déduit le commencement de l'éclipse à $9^h\ 4'\ 33'',4$, qui est à-peu-près le même temps que nous avions employé (n° 28) pour déterminer la distance réduite $\Sigma = 30',494$. On aura également pour la fin $\Sigma = 34',448$, $H' + \frac{1}{2}\gamma t' = -11^\circ 50'53''$, d'où l'on déduit $h' = 15',287$, $\delta' = 13',293$, $\alpha' = 41^\circ\ 0'\ 30''$, $\varphi' = +92^\circ\ 33'\ 15''$, $t' = +1^h,5594$, et par conséquent la fin de l'éclipse à $12^h\ 0'\ 8''$.

§ IV.

Du calcul inverse des éclipses pour des lieux déterminés.

55. Dans le calcul direct, nous avons déterminé les phénomènes relatifs aux éclipses, d'après les élémens supposés connus ou tels que les donnent les Tables astronomiques avec la longitude du lieu; dans le calcul inverse on remonte, d'après les observations, à la recherche de ces élémens, et par là à celle des erreurs des Tables et des longitudes des lieux où les observations ont été

Digitized by Google

faites. Quant à ce dernier objet, comme on observe immédiatement le temps de la conjonction en ascension droite, il est évident qu'on aura, sans aucun autre calcul, la différence des longitudes de ces lieux, en réduisant en degrés la différence des temps qu'on y comptait à l'instant physique de la même conjonction. Mais pour ce qui regarde les élémens, comme les Tables ne donnent immédiatement que la longitude et la latitude de la Lune, il faut d'abord réduire les résultats des observations, afin de les comparer avec les Tables; nous allons donc commencer par ces réductions.

56. *Le temps de la conjonction en ascension droite, et la différence des déclinaisons à cet instant étant donnés, on demande le temps de la conjonction en longitude et la différence des latitudes à l'instant de cette dernière conjonction.*

Soit

le temps de la conjonction en ascension droite... $= T$,
la différence des déclinaisons..... $= \Delta$,
le temps de la conjonction en longitude..... $= T+t$,
la différence des latitudes..... $= \Lambda$,
l'ascension droite de l'astre..... $= A$,
sa latitude..... $= L$,
l'obliquité de l'écliptique..... $= E$.

Les définitions de h, n, δ, n' (n° 16) étant supposées, si l'on fait, de plus, $\frac{\delta+n't}{h+nt} = \text{tang}\,\alpha$, et $\frac{\sin E \cos A}{\cos L} = \sin\lambda$, on aura

$$\Lambda = \frac{\Delta\cos\alpha}{\cos(\alpha-\lambda)}, \qquad t = -\frac{\Lambda\sin\lambda}{h+nt},$$

et le temps de la conj. en long. $= T - \frac{\Lambda\sin\lambda}{h+nt}$.

L'angle λ est toujours aigu, positif si A est entre 0° et 90°, ou entre 270° et 360°, négatif si A est entre 90° et 270°; α est de même toujours aigu, positif ou négatif, suivant que le numérateur de sa tangente sera lui-même positif ou négatif. On calculera d'abord une valeur approchée de t en négligeant les pe-

tits termes nt, $n't$, ensuite, si cette valeur est considérable; on répétera le calcul avec ces mêmes termes.

57. *Démonstration.* La conjonction en ascension droite a lieu lorsque la Lune passe en K (fig. 4) par le méridien fixe CM, cercle de déclinaison de l'astre, et la conjonction en longitude arrive dans l'instant où la Lune traverse en l le cercle de latitude CX du même astre; si l'on mène lq perpendiculaire à CK, t étant le temps que la Lune emploie à décrire lK, on aura évidemment (n° 21) $lq = ht + nt^2$, $Kq = \delta t + n't^2$, et l'inclinaison de l'orbite $Klq = \alpha$ sera connue par l'équation $\tang \alpha = \frac{\delta t + n't^2}{ht + nt^2}$. Soit menée Cp perpendiculaire à l'orbite, on aura $\alpha = KCp$; et en désignant par λ l'angle de position KCl, on sait que $\sin \lambda = \frac{\sin E \cdot \cos A}{\cos L}$: donc

$$Cp = \Delta \cos \alpha, \quad Cl = \frac{\Delta \cos \alpha}{\cos (\alpha - \lambda)} = \Lambda, \quad lq = \Lambda \sin \lambda = ht + nt^2,$$

d'où l'on déduit $t = \frac{\Lambda \sin \lambda}{h + nt}$: et comme le temps que nous avons supposé de l vers K doit être compté de K vers l, on aura le

$$\text{temps de la conj. en long.} = T - \frac{\Lambda \sin \lambda}{h + nt}.$$

58. *Exemple.* Supposons $T = 11^h\ 0'\ 9'',3$, $\Delta = 44',857$; $h = 23',953$, $\delta = 13',14$, $n = -0',0045$, $n' = 0$ (n° 28); comme on a aussi $A = 11°\ 12'\ 35''$, $E = 23°\ 28'\ 21''$, $L = 0$, on trouvera $\lambda = 22°\ 59'\ 55''$, et en supposant d'abord $n = 0$, on aura $\alpha = 28°\ 44'\ 55''$, $\Lambda = 39',527 = 39'\ 31'',6$, $t = -0^h\ 38'\ 40'',8$, et enfin le temps cherché de la conjonction en longitude $= 10^h\ 21'\ 28'',5$. Si l'on répète ensuite ces mêmes calculs, en y mettant $0',003$ à la place de nt, on verra que les résultats ne diffèrent pas sensiblement des précédens, c'est-à-dire, qu'ils seront toujours à-peu-près ceux-là mêmes $39'\,32''$, et $10^h\ 21'\ 28''$ que nous avions empruntés de M. Du Séjour, pour en déduire le temps de la conjonction en ascension droite et la différence des déclinaisons dans le même instant (n° 28).

59. *Étant données la différence des déclinaisons* Δ *à l'ins-*

Digitized by Google

tant de la conjonction en ascension droite, et une distance des centres S *observée dans le temps* T, *déterminer le temps de cette conjonction.*

Les définitions précédentes (n°s 16, 17) étant supposées, nommons, de plus, t le temps écoulé depuis la conjonction jusqu'à l'instant de l'observation de la distance; on calculera d'abord la valeur de $\Sigma = S - S \sin p \cos\pi$ (n° 22). Faisant ensuite, pour abréger,

$$a = n + \frac{p' nt}{2p} - nt^2,$$

$$b = \Delta - m - \frac{p' mt}{2p} + n't^2 + d't \sin p \cos\pi,$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}, \qquad \text{tang}\,\Psi = \frac{a}{b},$$

$$\cos\lambda = \frac{a\cos(\Psi - \alpha)}{\Sigma \sin\Psi} = \frac{b\cos(\Psi - \alpha)}{\Sigma\cos\Psi},$$

nous aurons

$$t = \frac{\Sigma \cos\alpha \sin(\Psi - \alpha \pm \lambda)}{h\cos(\Psi - \alpha)},$$

et le temps de la conjonct $= T - t$.

6o. L'angle α est toujours aigu et de même signe que δ; Ψ prend le signe de a, et il sera aigu ou obtus, suivant que b sera positif ou négatif; λ est de la même espèce que $\Psi - \alpha$, mais il sera positif ou négatif, selon que l'observation de la distance aura été faite avant ou après le passage de la Lune par la perpendiculaire menée du centre de l'astre à l'orbite relative : à l'instant de ce passage on a $\lambda = 0$, et $t = \frac{\Sigma\cos\alpha\,\text{tang}\,(\Psi - \alpha)}{h}$. Quant au calcul des petits termes, qui dépendent de la même quantité t que l'on cherche, il suffit d'y employer la valeur approchée de t déduite du temps de la conjonction pour le méridien des Tables, et combinée avec la longitude du lieu de l'observation, que l'on connaît à-peu-près; ou bien, on calculera d'abord par les formules précédentes, en y négligeant ces petits termes, une valeur approchée de t; ensuite on répétera tout le calcul, et on en aura la valeur exacte.

61. *Démonstration.* D'après les définitions de a et de b nous aurons (n° 22), $ht-a=\Sigma\sin\varphi$, $\delta t+b=\Sigma\cos\varphi$; et, en éliminant φ, on obtient

$$t^2(h^2+\delta^2)-2(ah-b\delta)t=\Sigma^2-(a^2-b^2).$$

Si l'on fait maintenant $\text{tang}\,\alpha=\frac{\delta}{h}$, $\text{tang}\,\Psi=\frac{a}{b}$, ce qui donne

$$h^2+\delta^2=\frac{h^2}{\cos^2\alpha},\quad a^2+b^2=\frac{b^2}{\cos^2\Psi},\quad\text{et}\quad ah-b\delta=hb(\text{tang}\,\Psi-\text{tang}\,\alpha)=\frac{hb\sin(\Psi-\alpha)}{\cos\Psi\cos\alpha},$$

on aura, par les substitutions,

$$\frac{h^2t^2}{\cos^2\alpha}-\frac{2ht}{\cos\alpha}\cdot\frac{b\sin(\Psi-\alpha)}{\cos\Psi}=\Sigma^2-\frac{b^2}{\cos^2\Psi},$$

d'où l'on tire

$$\frac{ht}{\cos\alpha}=\frac{b\sin(\Psi-\alpha)}{\cos\Psi}\pm\sqrt{\left(\Sigma^2-\frac{b^2}{\cos^2\Psi}+\frac{b^2\sin^2(\Psi-\alpha)}{\cos^2\Psi}\right)};$$

ou plus simplement,

$$\frac{ht}{\cos\alpha}=\frac{b\sin(\Psi-\alpha)}{\cos\Psi}\pm\sqrt{\left(\Sigma^2-\frac{b^2\cos^2(\Psi-\alpha)}{\cos^2\Psi}\right)};$$

et comme nous avons fait $\cos\lambda=\frac{b\cos(\Psi-\alpha)}{\Sigma\cos\Psi}$, on aura

$$\frac{ht}{\cos\alpha}=\frac{b\sin(\Psi-\alpha)}{\cos\Psi}\pm\Sigma\sin\lambda;$$

et, substituant à la place de b dans le premier terme du second membre la valeur $\frac{\Sigma\cos\lambda\cos\Psi}{\cos(\Psi-\alpha)}$, il viendra

$$\frac{ht}{\cos\alpha}=\Sigma\left[\text{tang}\,(\Psi-\alpha)\cos\lambda\pm\sin\lambda\right]=\frac{\Sigma\sin(\Psi-\alpha\pm\lambda)}{\cos(\Psi-\alpha)},$$

partant

$$t=\frac{\Sigma\cos\alpha\sin(\Psi-\alpha\pm\lambda)}{h\cos(\Psi-\alpha)}.$$

62. *Exemple.* Supposons que, lors de la même éclipse du 1er avril 1764, l'on ait observé à Londres, à 9^h 4′ 33″, la dis-

Digitized by Google

tance apparente des centres $S = 30',742$ au commencement de l'éclipse, c'est-à-dire, avant le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite. Employant les mêmes quantités calculées (n°s 27, 28), conservant de même les suppositions de $n' = 0$, $p' = 0$, $d' = 0$, et supposant t à-peu-près connu $= 1^h,95$; on aura $nt^2 = 0',017$, $\delta = 13',140$, $h = 23',953$, $a = -23',419$, $b = 4',991$; et par conséquent $\alpha = 28° 44' 53''$, $\Psi = -77° 58' 10''$, $\Psi - \alpha = -106° 43' 3''$, $\lambda = \pm 103° 3' 16''$; et, dans le cas présent, $\Psi - \alpha - \lambda = -209° 46' 19''$ $= 360° - 209° 46' 19'' = +150° 13' 41''$ (n° 24). D'où l'on conclut $t = -1^h,92672$, et le temps de la conjonction $11^h\ 0'\ 9'',2$ précisément le même que nous avions employé dans le calcul direct du n° 28 pour trouver la distance qui nous a servi ici de donnée.

63. La forme que nous donnons ici à la solution de ce problème, ne diffère de celle que nous avons publiée dans le premier volume des Ephémérides de Coimbre, page 237, qu'en ce que nous employons ici les lettres n, n', λ au lieu de h', δ', γ, et en ce que la quantité Ψ renferme ici tout l'effet des quantités $h't$, $\delta't$. Il faut cependant remarquer qu'en supposant dans les Ephémérides $h' = B \cos D'$, on avait oublié, par inadvertance, le terme $-\frac{1}{2}\delta \sin h \operatorname{tang} D'$ (n° 21); on y a pareillement négligé les petits termes qui dépendent de d', p', que nous comprenons dans la solution présente, afin qu'on puisse en tenir compte, dans les cas qui exigeront une plus grande précision.

64. *Ayant observé deux distances apparentes* S, S', *dans les temps* T, T', *déterminer le temps de la conjonction en ascension droite, et la différence* Δ *des déclinaisons au moment de cette conjonction.*

Soient H, H' les angles horaires correspondans aux temps T, T'; et t, t' les temps comptés depuis la conjonction. En calculant d'abord les quantités m, n, π pour le temps T, et leurs correspondantes m', n', π' pour le temps T', on cherchera avec ces quantités les distances réduites $\Sigma = S - S \sin p \cos \pi$, $\Sigma' = S' - S' \sin p \cos \pi'$. Ensuite, faisant $T' - T = \tau = t' - t$, et

Digitized by Google

calculant les quantités

$$a = n + \frac{p'nt}{2p} - \eta t^2, \qquad a' = n' + \frac{p'n't'}{2p} - \eta' t'^2,$$

$$e = m + \frac{p'mt}{2p} - \eta' t^2 - d't \sin p \cos \pi,$$

$$e' = m' + \frac{p'm't'}{2p} - \eta' t'^2 - d't' \sin p \cos \pi',$$

$$b = \delta\tau + e - e', \qquad c = h\tau + a - a',$$

$$\tang k = \frac{c}{b}, \qquad \sigma = \frac{(\Sigma'^2 - \Sigma^2)\sin^2 k}{c},$$

$$\cos\omega = \frac{\sigma - c}{2\Sigma \sin k}, \quad \text{ou} \quad \cos\omega' = \frac{\sigma + c}{2\Sigma' \sin k},$$

$$\varphi = k \pm \omega, \quad \text{ou} \qquad \varphi' = k \pm \omega',$$

on aura

$$t = \frac{\Sigma \sin\varphi + a}{h}, \qquad t' = \frac{\Sigma' \sin\varphi' + a'}{h},$$

$$\Delta = \Sigma \cos\varphi - \delta t + e \quad = \Sigma' \cos\varphi' - \delta' t' + e',$$

et le temps de la conjonction $= T - t = T' - t'$.

65. Dans les éclipses des étoiles on peut éviter la réduction des distances apparentes, tant pour l'immersion que pour l'émersion, parce que dans ces deux cas, quoique S, S' diffèrent entre eux, chacune de ces quantités devient toujours, par la réduction, égale au demi-diamètre horizontal Σ; par la même raison, on évite aussi le calcul de $\sigma = 0$. Dans les éclipses de Soleil, il suffit d'en réduire le demi-diamètre, comme on l'a dit (n° 53). L'angle k est toujours positif, ainsi que le numérateur c de sa tangente; il sera aigu ou obtus, selon que le dénominateur b sera positif ou négatif. Les angles ω, ω' seront aigus ou obtus, suivant que l'expression de leurs cosinus sera positive ou négative; et dans les expressions $k \pm \omega$, $k \pm \omega'$, on les prend avec le signe — lorsque le centre de la Lune passe au Nord du centre de l'astre, et avec le signe + quand il passe au Sud : si la somme ou la

Digitized by Google

différence de ces angles est plus grande que 180°, on suivra la remarque du n° 24.

66. *Démonstration.* En conservant les définitions du n° 64, on a évidemment (n° 22) les équations

$$\Delta + \delta t - e = \Sigma \cos\varphi, \qquad \Delta + \delta t' - e' = \Sigma' \cos\varphi',$$
$$ht - a = \Sigma \sin\varphi, \qquad ht' - a' = \Sigma' \sin\varphi';$$

la différence des deux premières, et celle des deux secondes donnent

$$[1]\ldots b + \Sigma\cos\varphi = \Sigma'\cos\varphi', \quad \text{et} \quad c + \Sigma\sin\varphi = \Sigma'\sin\varphi';$$

de la somme des carrés de ces dernières on tire, en éliminant φ',

$$[2]\ldots b^2 + c^2 + 2\Sigma(b\cos\varphi + c\sin\varphi) = \Sigma'^2 - \Sigma^2.$$

Supposons maintenant $\text{tang}\, k = \frac{c}{b}$, on aura par-là

$$c^2 + b^2 = c^2(1 + \cot^2 k) = \frac{c^2}{\sin^2 k}, \text{ et } 2\Sigma(b\cos\varphi + c\sin\varphi) = \frac{2c\Sigma\cos(\varphi - k)}{\sin k},$$

valeurs qui étant substituées dans l'équation [2] donnent

$$2\Sigma \sin k \cos(\varphi - k) = \frac{(\Sigma'^2 - \Sigma^2)\sin^2 k}{c} - c;$$

faisant, de plus, le premier terme du second membre $= \sigma$; et $\frac{\sigma - c}{2\Sigma \sin k} = \cos\omega$, on aura $\cos(\varphi - k) = \cos\omega$, ou $\varphi - k = \pm\omega$, ou enfin $\varphi = k \pm \omega$.

L'angle φ étant ainsi déterminé, les équations primitives qui le renferment donnent immédiatement

$$t = \frac{\Sigma\sin\varphi + a}{h}, \quad \Delta = \Sigma\cos\varphi - \delta t + e,$$

et le temps de la conjonction $= T - t$.

67. Si, au moyen des équations [1], on élimine φ, et qu'en répétant les mêmes opérations on fasse $\frac{\sigma' + c}{2\Sigma' \sin k} = \cos\omega'$, on aura

pareillement une seconde solution $\varphi' = k \pm \omega'$, $t' = \frac{\Sigma' \sin \varphi' + a'}{h}$, $\Delta = \Sigma' \cos \varphi' - \delta' t' + e'$, et le temps de la conjonct. $= T' - t'$.

68. *Exemple.* A Vienne en Autriche, par 48° 12′ 30″ de latitude boréale, on a observé, au commencement de la même éclipse, une distance apparente des centres $S = 30',7783$, à $10^h\ 22'\ 5''$; et sur la fin, une autre distance $S' = 30',8017$, à $1^h\ 22'\ 54''$, et la Lune traversait la partie boréale du Soleil. En supposant donc la même ellipticité de la Terre, nous aurons $P = 47°\ 53'\ 14''$, et $p = 53',992$ (n°s 3, 5), et puisque les quantités h, δ, n sont les mêmes pour tous les lieux, et que nous avons ici $\tau = 3^h,01361$; sachant d'ailleurs, par les Ephémérides, qu'on aura à-peu-près $t = -1^h,7$ et $t' = 1^h,3$, on en déduit $h\tau = 72',185$, $\delta\tau = 39',599$, $nt = -0',013$, $nt' = -0',0076$.

69. Cela étant, nous aurons pour l'observation

du commencement,		pour celle de la fin;		d'où l'on tire	
$H =$	$-\ 24°\ 28'\ 44''$	$H' =$	$20°\ 43'\ 30''$	$b =$	$39',676$
$n =$	$-\ 15',002$	$n' =$	$12',813$	$c =$	$44',3754$
$m =$	$+\ 37',140$	$m' =$	$37',063$	$k =$	$48°\ 12'\ 0''$
$\pi =$	$+\ 47°\ 53'$	$\pi' =$	$46°\ 34'$	$\sigma =$	$0',0114$
$\Sigma =$	$+\ 30',453$	$\Sigma' =$	$30',468$	$\omega = \pm$	$167°\ 42'\ 50''$
$a =$	$-\ 14',813$	$a' =$	$12',8206$	$\omega' = \pm$	$12°\ 16'\ 50''$;
$e =$	$+\ 37',140$	$e' =$	$37',063$		

et comme dans le cas dont il s'agit on doit prendre le signe —, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = -\ 119°\ 30'\ 50'' \\ \varphi' = \quad 35\ \ 55\ \ 10 \end{array}\right\} \text{ et partant... } \left\{\begin{array}{l} t = -\ 1^h,73217, \\ t' = +\ 1^h,28145; \end{array}\right.$$

chacune de ces valeurs donne enfin $\Delta = 44',898$, et la conjonct. à $12^h\ 6'\ 1''$. Si maintenant on réduit ces résultats à l'écliptique (n° 56), on aura la conjonct. en longit. à $11^h\ 27'\ 18''$; et la différence des latitudes ou, dans ce cas, la latitude de la Lune $= 39'\ 33'',7$. M. Du Séjour (pag. 293) trouve $11^h\ 27'\ 17''$ et $39'\ 32',7$.

Digitized by Google

70. Il faut cependant remarquer que dans les éclipses centrales, ou presque centrales, ce problème, quelle que soit la manière de le résoudre, ne peut pas être de grande utilité; car les plus petites erreurs dans les observations des distances influent considérablement sur les deux quantités que l'on cherche; et cela provient de ce que l'angle ω étant alors peu différent de 0, ou de 180°, la moindre variation dans le cosinus en produit une très-considérable sur le même angle. Il peut même arriver que, par une petite erreur, on trouve le cosinus plus grand que le rayon, ce qui, en rendant imaginaire l'angle ω, montrerait que le cas est impossible; ainsi que le serait celui d'inscrire dans un cercle une corde plus grande qne le diamètre. Néanmoins les deux observations ne sont pas tont-à-fait inutiles, parce que chacune d'elles, combinée avec la différence des déclinaisons, déduite des observations faites dans un autre endroit où l'éclipse sera moins centrale, donnera, par le problème du n° 59, le temps de la conjonction; et le milieu des deux résultats pourra être considéré comme exact.

La remarque du n° 63 s'applique également à la solution de ce problème.

71. *Ayant observé la plus courte distance* S *des centres dans le temps* T, *on demande le temps de la conjonction, et la différence des déclinaisons* Δ *à l'instant de la conjonction.*

Si l'on conserve les définitions du problème précédent et celles de

$$\left.\begin{aligned} h' &= h - \gamma' g \cos H \\ \delta' &= \delta - \gamma' q \sin H \end{aligned}\right\} \text{(n° 36)},$$

et si l'on fait $\tang k = \frac{h'}{\delta'}$, $\varphi = k \pm 90°$, on aura

$$t = \frac{\Sigma \sin\varphi + a}{h}, \qquad \Delta = \Sigma \cos\varphi - \delta' t + c,$$

et le temps de la conjonction $= T - t$.

72. *Démonstration.* On peut regarder ce problème comme un cas particulier du précédent, et supposer qu'on a observé deux distances égales, car la distance étant un *minimum*, sa variation doit être nulle. On aura donc dans des temps T, T' infiniment peu différens l'un de l'autre $c = h\tau + a - a'$; (n° 64), et, en supposant la différence $t - t'$ ou τ infiniment petite, $a - a' = n - n' = g\sin H - g\sin H'$ (n° 30) $= -g\cos H dH = -g\gamma'\tau\cos H$ (n° 26), partant $c = h\tau - g\gamma'\tau\cos H = h'\tau$. Pareillement, on trouve $b = \delta'\tau$, et par conséquent $\frac{c}{b} = \frac{h'}{\delta'} = \text{tang } k$. On a, de plus, $\dot{\Sigma}^2 - \Sigma^2 = 0$; on aura aussi $\sigma = 0$, et $\cos\omega = \frac{-h'\tau}{a\Sigma\sin k} = 0$, ce qui donne $\omega = \pm 90°$, et partant $\varphi = k \pm 90°$. Le reste se continue comme dans le problème précédent, en prenant, comme on y a fait, 90° avec le signe —, lorsque la Lune passe au nord du centre du Soleil, et le signe + quand elle passe au sud.

73. *Exemple.* Lors de la même éclipse, M. Short a observé à Londres la plus courte distance des centres $S = 1' 21'',4$, à $10^h 30' 44''$, le centre de la Lune étant d'ailleurs plus austral que le centre du Soleil. Ainsi, avec l'angle horaire $H = -22° 19' 0$ et les quantités h, δ, ζ, g, q calculées (n° 30), nous aurons $n = -12',843$, $m = 39',285$, $\pi = 49° 58'$, et la plus courte distance réduite $\Sigma = 1',343$. Si l'on calcule maintenant les quantités $h' = 15',7616$ et $\delta' = 13',423$, on aura $k = 49° 34' 50''$, et par conséquent $\varphi = 139° 34' 50''$. On conclura de ces calculs $t = -0^h,4998$, $\Delta = 44',831$, et la conjonction à $11^h 0' 43''$. Ces résultats étant réduits à l'écliptique, conformément au n° 56, donnent la conjonction en longitude à $10^h 22' 3''$, et la latitude de la Lune correspondante à cet instant $39' 30'',2$. M. Du Séjour (page 303) a trouvé $10^h 22' 2''$, et $39' 30'',3$.

74. Nous avons donné ici ce problème, plutôt par sa singularité en théorie que pour son usage dans la pratique. Car, la plus courte distance étant sensiblement la même pendant quelque temps, ce n'est que par hasard qu'on pourra juger, par observation, du véritable moment où elle a lieu, et l'erreur, dans cette partie, jettera beaucoup d'incertitude dans les résultats, et notamment sur le temps de la conjonction, comme on le voit (n° 69). Afin

Digitized by Google

d'obtenir par ce moyen des résultats plus exacts, il faudrait faire plusieurs observations avant et après l'instant de la plus courte distance, lorsqu'elle diminue encore, jusqu'à ce qu'elle commence à croître sensiblement, et en déduire, par interpolation, l'instant où elle a été la plus courte.

75. *Etant données trois distances* S, S′, S″, *observées dans les temps* T, T′, T″, *on demande le temps de la conjonction* T°, *la différence des déclinaisons* Δ, *et celle des parallaxes* p.

Avec ces mêmes élémens T°, Δ, p, tirés des Tables, ou avec des élémens arbitraires, mais peu différens de ceux-ci, on calculera d'abord, pour chacun des temps T, T', T'', les quantités correspondantes m, n, μ, π; m', n', μ', π'; m'', n'', μ'', π'' (n° 17), afin d'en conclure les réductions $S \sin p \cos\pi$, $S' \sin p \cos\pi'$, $S'' \sin p \cos\pi''$, des distances observées S, S', S'': et ces distances réduites au plan de projection seront

$$\Sigma = S - S \sin p \cos\pi,$$
$$\Sigma' = S' - S' \sin p \cos\pi',$$
$$\Sigma'' = S'' - S'' \sin p \cos\pi''.$$

Continuant ensuite les calculs du n° 17 avec les mêmes élémens hypothétiques, nous aurons trois valeurs calculées des mêmes distances réduites Σ, Σ', Σ''. Nommons maintenant $d\Sigma$, $d\Sigma'$, $d\Sigma''$ les différences respectives entre les premières et les secondes, et faisant $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, calculons, de plus, les quantités

$$A = \frac{h \sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}, \qquad A' = \frac{h \sin(\varphi'+\alpha)}{\cos\alpha}, \qquad A'' = \frac{h \sin(\varphi''+\alpha)}{\cos\alpha},$$
$$B = \sin\pi \cos(\mu-\varphi), \quad B' = \sin\pi' \cos(\mu'-\varphi'), \quad B'' = \sin\pi'' \cos(\mu''-\varphi'');$$
$$F = A\cos\varphi' - A'\cos\varphi, \quad G = B\cos\varphi' - B'\cos\varphi,$$
$$F' = A'\cos\varphi'' - A''\cos\varphi', \quad G' = B'\cos\varphi'' - B''\cos\varphi',$$
$$f = d\Sigma'\cos\varphi - d\Sigma\cos\varphi', \quad K = FG' - F'G,$$
$$f' = d\Sigma''\cos\varphi' - d\Sigma'\cos\varphi'', \quad k = Ff' - F'f,$$

nous aurons enfin

$$dp = \frac{k}{K}; \qquad dT^\circ = \frac{f - G\,dp}{F};$$
$$d\Delta = \frac{d\Sigma + A\,dT^\circ + B\,dp}{\cos\varphi}.$$

76. *Démonstration.* Si les élémens hypothétiques étaient exacts, il est clair que les distances réduites calculées pour les temps donnés d'après ces élémens, coïncideraient avec les distances réduites observées, que nous supposons exactes. Les différences seront donc produites par les erreurs des élémens, et serviront par conséquent à les déterminer dès qu'on en connaîtra les rapports. Parmi les élémens donnés par les Tables astronomiques, il n'y a que les mouvemens horaires qu'on peut regarder comme exacts, et même plus exacts qu'on ne pourrait les déduire immédiatement des observations; c'est sur les autres qu'il reste encore quelqu'incertitude, ainsi que sur l'ellipticité de la Terre. Nous nous bornerons dans ce moment aux seuls élémens qui appartiennent à la Lune.

77. Supposons donc, qu'au moyen des élémens hypothétiques nous trouvons, pour un temps T, la distance réduite Σ (n° 16): il s'agit de déterminer la variation $d\Sigma$, qui aura lieu si le temps de la conjonction T°, se change en $T^\circ+dT^\circ$; la différence des déclinaisons Δ, en $\Delta+d\Delta$; et la différence des parallaxes p, en $p+dp$. Pour cela, nous avons $\Sigma^2 = M^2 + N^2$ (n° 22), et par conséquent $\Sigma d\Sigma = MdM + NdN$, ou

$$d\Sigma = \frac{M}{\Sigma}dM + \frac{N}{\Sigma}dN = dM\cos\varphi + dN\sin\varphi.$$

Observant ensuite, que dans cette différentiation nous pouvons négliger les variations des petits termes qui entrent dans les expressions de M et de N, en raison de la petitesse de leurs coefficiens, on aura donc

$$dM = d\Delta + \delta dt - \frac{m}{p}\,dp;$$

$$dN = h dt - \frac{n}{p}\,dp.$$

Mais, puisque l'on a $t = T - T^\circ$, ou $dt = -dT^\circ$, donc

$$d\Sigma = d\Delta\cos\varphi - dT^\circ(h\sin\varphi + \delta\cos\varphi) - \frac{dp}{p}(n\sin\varphi + m\cos\varphi).$$

Or, la supposition de $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$ donne

$$h\sin\varphi + \delta\cos\varphi = \frac{h\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha};$$

et celles de $\text{tang}\,\mu = \frac{n}{m}$, et de $\sin\pi = \frac{m}{p\cos\mu}$ donnent aussi

$$n\sin\varphi + m\cos\varphi = \frac{m\cos(\mu-\varphi)}{p\cos\mu} = \sin\pi\cos(\mu-\varphi):$$

faisant donc

$$\frac{h\sin(a+\varphi)}{\cos a} = A, \quad \sin\pi\cos(\mu-\varphi) = B,$$

et calculant de pareilles valeurs A', B'; A'', B'', pour les deux autres observations, nous aurons pour la détermination de $d\Delta$, dT°, dp les trois équations suivantes

$$\begin{aligned} d\Delta\cos\varphi - A\,dT^\circ - B\,dp &= d\Sigma, \\ d\Delta\cos\varphi' - A'\,dT^\circ - B'\,dp &= d\Sigma', \\ d\Delta\cos\varphi'' - A''\,dT^\circ - B''\,dp &= d\Sigma'', \end{aligned}$$

qui, au moyen des éliminations, donnent les résultats proposés (n° 75).

78. *Exemple.* Supposons qu'à Vienne en Autriche, outre les deux distances dont nous nous sommes servis (n° 68), on ait observé aussi la distance 20′ 18″,2 à $10^h\,54'$; et prenons pour élémens hypothétiques $T^\circ = 12^h\,4'$, $\Delta = 44',489$, $p = 54',293$; en calculant d'après ces données, on aura le résultat suivant :

$T = 10^h\,22'\,5''$	$T' = 10^h\,54'\,0''$	$T'' = 1^h\,22'\,54''$
$S = 30',7783$	$S' = 20',3032$	$S'' = 30',8017$
$H = -24°\,28'\,44''$	$H' = -16°\,30'\,0''$	$H'' = 20°\,43'\,30''$
$n = -15',0857$	$n' = -10',3403$	$n'' = 12',8839$
$m = 37,3472$	$m' = 37,1980$	$m'' = 37,2701$
$\mu = -21°\,59'\,43''$	$\mu' = -15°\,32'\,5''$	$\mu'' = 19°\,4'\,10''$
$\log\sin\pi = 9.870333$	$\log\sin\pi' = 9.851939$	$\log\sin\pi'' = 9.861129$
réd. $= -0',3259$	réd. $= -0',2254$	réd. $= -0',3343$
$\Sigma = 30,4524$	$\Sigma' = 20,0778$	$\Sigma'' = 30,4674$
$t = -1^h,69861$	$t' = -1^h,16667$	$t'' = 1^h,315$
$ht = -40',6867$	$ht' = -27',9451$	$ht'' = 31',4981$
$ht^2 = -0,0129$	$ht'^2 = -0,0061$	$ht''^2 = -0,0077$
$N = -25,6139$	$N' = -17,6109$	$N'' = 18,6065$
$M = -15,1689$	$M' = -8,0390$	$M'' = 24,5070$
$\varphi = -120°\,38'\,4''$	$\varphi' = -114°\,32'\,7''$	$\varphi'' = 37°\,12'\,25''$
$\Sigma = 29',7687$	$\Sigma' = -19',3593$	$\Sigma'' = 30',7700$
$d\Sigma = 0',6837$	$d\Sigma' = 0',7185$	$d\Sigma'' = -0',3026$

Logarithmes.

$\cos\varphi = -9.707194$	$\cos\varphi' = -9.618313$	$\cos\varphi'' = 9.901162$
$A = -1.436248$	$A' = -1.435309$	$A'' = 1.397058$
$B = -9.047035$	$B' = -9.046298$	$B'' = 9.838995$
$F = -0.405705$	$G = -8.017572$	$f = -8.914914$
$F' = -1.054621$	$G' = 9.296700$	$f' = -9.649918$
$K = -9.793829$	$k = 9.310460$	
$dp = -0',3286$	$dT^s = +0^s,0336$	$d\Delta = +0',3893.$

79. Appliquant donc ces corrections aux élémens hypothétiques, nous aurons d'abord $T^s = 12^h\,4' + 0^s,0336 = 12^h\,6'\,1''$, qui est précisément la même valeur que nous avions trouvée au moyen des deux observations (n° 69); ensuite $\Delta = 44',489 + 0'3893 = 44',8783$, qui diffère seulement de $1'',2$ de ce que nous avions trouvé; et enfin $p = 54',293 - 0,3286 = 53'9644$, qui diffère seulement de $1'',7$ en moins, de ce que nous avions déduit des Tables et employé dans le calcul du même n° 69. La coïncidence de ce dernier résultat avec celui que donne M. Du Séjour (pag. 313) est digne de remarque; il a aussi trouvé $1'',5$ en moins, et cela en combinant les deux distances observées à Vienne, avec la plus courte distance observée à Londres, parce qu'il a limité la solution de ce problème à la condition que l'une des distances fût la plus courte, quoique observée dans un autre lieu.

80. D'après la remarque du n° 23, on ne devrait point négliger ici, dans le calcul de M et de N, aucun des petits termes qui entrent dans leurs expressions (n° 17); mais songeant moins à l'exactitude de nos formules qu'à les rendre équivalentes à celles de M. Du Séjour, afin d'en comparer les résultats (n° 27), nous avons négligé tous ces petits termes, à l'exception de nt^2. Il faut remarquer aussi que les élémens que l'on obtient par la méthode de ce problème doivent participer de l'erreur provenante de l'ellipticité de la Terre. L'ellipticité adoptée par cet auteur, et que nous employons ici, par la raison qu'on vient de voir, paraît être trop grande. Il n'y a cependant pas de certitude sur cet élément fugitif, et il est même possible qu'il soit différent dans les différens lieux. Au moyen du problème suivant, nous pourrons néan-

Digitized by Google

moins acquérir à cet égard des connaissances qui nous manquent encore.

81. *Étant observées quatre distances apparentes* S, S′, S″, S‴, *dans les temps* T, T′, T″, T‴, *déterminer le temps de la conjonction* T°, *la différence des déclinaisons* Δ, *celle des parallaxes* p, *et l'ellipticité de la Terre* $(f-1)$ [*].

Ce problème se résout par la méthode du problème précédent, en y introduisant de plus la variation de P, laquelle dépend de l'ellipticité, qui par conséquent pourra être déterminée dès qu'on aura corrigé l'angle P (n° 3). Pour cela il ne faut qu'ajouter à l'expression de dN (n° 77), le terme $pdP \sin P \sin H$, et à celle de dM le terme $-pdP(\cos P \cos D + \sin D \sin P \cos H)$, c'est-à-dire les variations de n en m par rapport à P, et l'on ajoutera par conséquent à la valeur précédente de $d\Sigma$ le terme.... $-pdP(\cos P \cos D \cos\varphi + \sin D \sin P \cos H \cos\varphi - \sin P \sin H \sin\varphi)$. Ici l'unité de p est la minute, et celle de dP est le rayon; mais on peut changer ces rapports en mettant $\sin p$ au lieu de p, et compter dP en minutes. C'est aussi ce que nous ferons.

82. Soit donc, pour abréger, $\sin p \cos P \cos D = \mathfrak{C}'$,

$$\sin p \sin P = g',$$
$$\sin p \sin D \sin P = q',$$

calculant maintenant pour la quatrième observation les quantités A'', B'' comme dans le problème précédent, et faisant de plus

$$C = \mathfrak{C}'\cos\varphi + q'\cos H \cos\varphi - g'\sin H \sin\varphi,$$
$$C' = \mathfrak{C}'\cos\varphi' + q'\cos H' \cos\varphi' - g'\sin H' \sin\varphi',$$
$$C'' = \mathfrak{C}'\cos\varphi'' + q'\cos H'' \cos\varphi'' - g'\sin H'' \sin\varphi'',$$
$$C''' = \mathfrak{C}'\cos\varphi''' + q'\cos H''' \cos\varphi''' - g'\sin H''' \sin\varphi''',$$

nous aurons les quatre équations suivantes

$$d\Delta\cos\varphi - AdT^\circ - Bdp - CdP = d\Sigma;$$
$$d\Delta\cos\varphi' - A'dT^\circ - B'dp - C'dP = d\Sigma',$$
$$d\Delta\cos\varphi'' - A''dT^\circ - B''dp - C''dP = d\Sigma'',$$
$$d\Delta\cos\varphi''' - A'''dT^\circ - B'''dp - C'''dP = d\Sigma'''.$$

[*] *Voyez à la fin de ce Mém. l'Addition sur ce probl. et sur le précédent.*

Digitized by Google

Pour la résolution de ces équations, ayant d'abord calculé les quantités F, F', G, G', f, f', K, k, comme dans le problème précédent, on calculera de plus les suivantes

$$\begin{aligned}
F'' &= A'' \cos\varphi'' - A'' \cos\varphi', & E &= C\cos\varphi' - C'\cos\varphi ;\\
G'' &= B'' \cos\varphi'' - B'' \cos\varphi', & E' &= C'\cos\varphi' - C''\cos\varphi',\\
f'' &= d\Sigma'' \cos\varphi' - d\Sigma'' \cos\varphi'', & E'' &= C''\cos\varphi'' - C''\cos\varphi',\\
K' &= FG' - F''G', & L &= FE' - F'E,\\
k' &= Ff'' - F''f', & L' &= F'E'' - F''E';\\
R &= KL' - K'L, & r &= Kk' - K'k,
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on aura enfin

$$dP = \frac{r}{R}, \quad dp = \frac{k - LdP}{K}, \quad dT^\circ = \frac{f - Gdp - EdP}{F},$$

$$d\Delta = \frac{d\Sigma + AdT^\circ + Bdp + Cdp}{\cos\varphi}.$$

83. Ce procédé de calcul est le même que celui du problème précédent ; il convient de prendre pour valeur hypothétique de P la hauteur du pôle, dP sera alors l'angle de la verticale, et l'on aura immédiatement

$$\rho - 1 = \frac{\sin dP}{2\sin P\cos P} = \frac{\sin dP}{\sin 2P} \text{ (n° 3)};$$

et la différence des parallaxes équatoriales $= \frac{P}{1-(\rho-1)\sin^2 P}$ (n° 4).

Dès que l'ellipticité sera une fois fixée, au moyen d'un grand nombre d'observations, il suffira de se servir du problème précédent pour déterminer les autres élémens : et comme l'erreur de la parallaxe doit être constante si les équations de cet élément données par les Tables sont exactes ; si on la trouve telle après un grand nombre d'observations, dès-lors, on n'aura plus besoin que du problème du n° 64.

84. Quant aux observations les plus convenables pour ces recherches : celles du Soleil sont plus spécieuses, mais plus rares, et il est plus difficile de les bien faire. Celles des étoiles de première et de seconde grandeur sont plus fréquentes et plus susceptibles d'exactitude. Il faut cependant, pour bien réussir, qu'on s'attache à perfectionner autant que possible l'usage des micromètres et à bien observer une distance apparente une demi-heure à peu

Digitized by Google

près avant l'immersion, et l'autre une demi-heure après l'émersion ; en observant également dans les intervalles le demi-diamètre apparent de la Lune. De là, on déduira le demi-diamètre horizontal, ainsi que le rapport de ce dernier avec la parallaxe équatoriale. Les éclipses centrales ou presque centrales ne sont d'aucune utilité pour ces recherches, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (n° 70).

§ V.

Détermination des lieux de la Terre entre lesquels les éclipses sont visibles.

85. *Étant donné le temps de la conjonction de la Lune avec un astre quelconque, déterminer si cette conjonction est écliptique, et quelles sont sur la Terre les circonstances générales de cette éclipse.*

Pour cela il ne faut que calculer les quantités Δ, h, δ, p (n° 16); car, en faisant $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, $\Delta \cos\alpha$ représentera la plus courte distance à laquelle le centre de la Lune peut se trouver par rapport au centre de la projection. Faisant donc la somme des demi-diamètres des astres $= \Sigma$, le rayon de la projection $= p$; il est évident que, si $\Delta \cos\alpha$ est plus grand que $p + \Sigma$, l'éclipse n'est possible sur aucun point de la Terre; si ces deux quantités sont égales, il n'y aura qu'un seul point de la Terre où l'on pourra observer le contact des astres; mais lorsque $\Delta \cos\alpha$ est moindre que $p + \Sigma$, l'éclipse sera visible sous différens lieux de la Terre, et d'autant plus, que la distance $\Delta \cos\alpha$ sera plus petite. Si, maintenant, la valeur de $\Delta \cos\alpha + \Sigma$ est égale à p, ou plus petite, toute l'éclipse sera visible sur la Terre, mais elle n'en embrassera jamais tout l'hémisphère, puisqu'il faudrait, pour cela, que p fût plus petit que Σ; et comme les étoiles n'ont pas de diamètre sensible, il s'ensuit que les éclipses d'étoiles s'étendent à un espace plus petit que celles de Soleil. Enfin, suivant que la valeur de $\Delta \cos\alpha$ sera plus grande, égale, ou plus petite que p, l'éclipse centrale sera, ou tout-à-fait

invisible sur la Terre, ou visible sur un seul point, ou sur plusieurs.

86. *Exemple.* Dans la conjonction du 1er avril 1764, nous avons $\Delta\cos\alpha = 39',3$, $\Sigma = 30',6$, $p = 54'$; de ces données nous pourrions conclure: que cette conjonction était écliptique, puisque $\Delta\cos\alpha < \Sigma + p$: que toute l'éclipse n'était pas visible sur la Terre, parce que $\Delta\cos\alpha + \Sigma > p$: mais qu'on y observerait pourtant la phase centrale, vu que $\Delta\cos\alpha > p$.

87. *Déterminer le lieu de la Terre qui observera le premier le commencement de l'éclipse au lever du Soleil, le dernier qui en observera la fin au coucher de cet astre, et la durée de l'éclipse sur la Terre.*

En conservant les définitions précédentes, et faisant de plus $\frac{s}{k} = \text{tang}\,\alpha$, $\frac{\Delta\cos\alpha}{p+\Sigma} = \sin\lambda$, on aura

$$\sin P = \sin(\lambda \pm \alpha)\cos D, \quad \cos H = -\text{tang}\,D\,\text{tang}\,P,$$
$$t = \frac{(p+\Sigma)\cos P \sin H}{k}.$$

Le signe — sert pour le premier lieu cherché, et + pour le dernier, quel que soit d'ailleurs le signe de α. L'angle λ, qui est donné par le sinus, peut être indifféremment aigu ou obtus, et dans l'un et l'autre cas, on aura pour P les mêmes valeurs, mais en ordre inverse, par rapport au signe de α. Avec chacune des valeurs de P on calculera par la seconde équation l'angle H et le temps T, et par la troisième, le temps t compté depuis la conjonction : le temps de la conjonction $T-t$ étant ainsi connu, on en déduira la longitude du lieu; et comme la conjonction arrive pour tous les lieux dans le même instant physique, les deux temps comptés depuis cet instant jusqu'aux temps des deux observations, donneront la durée de l'éclipse sur la Terre.

En employant dans ce calcul la parallaxe moyenne correspondante à 45°, on aura des résultats assez suffisans pour l'annonce de ces phénomènes; mais, si l'on en desire de plus exacts, on cherchera les valeurs de p correspondantes à celles de P (n° 4), avec lesquelles on calculera les valeurs exactes de λ et ensuite celles de P (n° 87).

Digitized by Google

88. *Démonstration.* Si l'on conçoit que la Lune ait un demi-diamètre égal à la somme des demi-diamètres de la Lune et du Soleil, il est facile de voir que lorsque sa circonférence, ainsi augmentée, touchera celle de l'horizon de la projection, l'observateur qui se trouvera dans le point de contact sera le premier qui verra le commencement de l'éclipse; pareillement, celui qui se trouvera dans le contact des mêmes circonférences à leur séparation, sera le dernier qui en verra la fin. En supposant donc, dans ce cas, que la circonférence de la projection soit circulaire, le point de contact et le centre de la Lune se trouveront dans le prolongement d'un même rayon de la projection, et en baissant de ces points des perpendiculaires au méridien, les triangles semblables donneront

$$\left\{\begin{array}{l} p : p+\Sigma :: n : ht \\ p : p+\Sigma :: m : \Delta+\delta t \end{array}\right\} \text{(n° 16)};$$

en éliminant t, et faisant ensuite $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{\Delta}$, $\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha}{p+\Sigma}$, et en substituant les valeurs de m, n, on aura

$$\sin P\cos D\cos\alpha - \sin D\cos P\cos\alpha\cos H - \cos P\sin\alpha\sin H = \sin\lambda.$$

On a aussi dans ce cas $\cos H = -\,\text{tang}\,D\,\text{tang}\,P$ (n° 8), et partant, $\sin H = \pm\sqrt{(1-\text{tang}^2 D\,\text{tang}^2 P)}$; donc, en éliminant H de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\sin P\cos\alpha}{\cos D} - \sin\lambda = \pm\sqrt{\left(\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)},$$

et chassant le radical,

$$\frac{\sin^2 P}{\cos^2 D} - 2\sin\lambda\cos\alpha.\frac{\sin P}{\cos D} = \sin^2\alpha - \sin^2\lambda;$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin P}{\cos D} &= \sin\lambda\cos\alpha \pm \sqrt{(\sin^2\alpha - \sin^2\lambda + \sin^2\lambda\cos^2\alpha)} \\ &= \sin\lambda\cos\alpha \pm \sin\alpha\cos\lambda;\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sin P = \sin(\lambda \pm \alpha)\cos D.$$

89. *Exemple.* Dans la même éclipse, on a (n° 28), $\alpha = 28^\circ 44' 50''$, $\Delta \cos\alpha = 39',528$, et prenant $\Sigma = 30,610$, $p = 54'$, on trouvera $\lambda = 27^\circ 41' 50''$, et par conséquent $P = -1^\circ 2' 47''$ pour le premier lieu, et $P = 56^\circ 8' 20''$ pour le dernier. A la première de ces deux valeurs de P correspond $p = 54',163$ (n° 4), avec laquelle, en répétant le calcul, on trouve $\lambda = 27^\circ 38' 30''$ et $P = -1^\circ 6' 6''$; faisant les mêmes opérations pour la seconde, on obtiendra $p = 53',952$, $\lambda = 27^\circ 42' 50''$ et $P = 56^\circ 9' 42''$. A ces deux dernières valeurs de P correspondent les latitudes $1^\circ 7' 2''$ australe, et $56^\circ 27' 20''$ boréale (n° 3). M. Du Séjour (page 168) a trouvé $1^\circ 1' 55''$ et $56^\circ 17' 21''$.

Quant aux longitudes de ces lieux: on trouve (n° 87), pour le premier $H = -89^\circ 54' 24''$; partant, $T = 6^h 0' 22''$ du matin, $t = -3^h 32' 20''$, la conjonction à $9^h 32' 42''$, et la longitude du lieu $1^h 37' 4''$ à l'occident de Paris. Pareillement, en faisant les mêmes calculs pour le second, on obtient, $H = 97^\circ 14'$, $T = 6^h 28' 56''$ du soir, $t = 1^h 57' 2''$ la, conjonction à $4^h 31' 54''$, et la différence de longitude $5^h 22' 8''$ vers l'orient. Cette éclipse ayant commencé sur la Terre à $3^h 22' 20''$ avant la conjonction, et n'ayant fini que $1^h 57' 2''$ après, sa durée a donc été de $5^h 29' 22''$. M. Du Séjour trouve la durée $5^h 28' 21''$, et les longitudes $1^h 37' 21''$ à l'occident, et $5^h 21' 33''$ à l'orient.

90. *Dans un parallèle quelconque donné, déterminer les lieux qui doivent observer le commencement ou la fin de l'éclipse, soit au lever, soit au coucher de l'astre éclipsé.*

Il faut d'abord chercher la valeur de H par l'équation

$$\cos H = -\operatorname{tang} D \operatorname{tang} P \quad (\text{n° 8}),$$

et on en conclura l'heure T du lieu. Ensuite on calculera les quantités m, n (n° 17), et en supposant la somme des demi-diamètres horizontaux $= \Sigma$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{n}{h}$, et $\cos\lambda = \frac{n\sin\alpha + (3-m)\cos\alpha}{\Sigma}$, nous aurons

$$t = \frac{\Sigma \sin(\pm\lambda - \alpha) + n}{h}, \text{ et le temps de la conj.} = T - t.$$

Il faut prendre toujours λ négatif pour le commencement de l'éclipse, et positif pour la fin, soit qu'elle arrive dans l'horizon oriental ou dans l'occidental; il sera aigu ou obtus, selon que le numérateur de l'expression de son cosinus sera positif ou négatif. Au reste, la valeur de cet angle, pour le lever de l'astre, est différente de celle qui appartient à son coucher; mais on les obtient toutes les deux par les mêmes valeurs numériques de m et de n; en observant seulement qu'il faut prendre n négatif pour l'horizon oriental, et positif pour l'occidental, m restant toujours le même dans les deux cas. Ces mêmes nombres serviront encore pour le calcul du parallèle austral de la même latitude que le premier, en changeant seulement le signe de m. On aura ainsi déterminé huit différens lieux sur la surface de la Terre, si cependant quelques-uns ne deviennent pas impossibles, ce qui a lieu toutes les fois que $\cos\lambda$ devient plus grand que l'unité. Les longitudes de ces différens lieux se déterminent, comme l'on sait, en comparant les temps respectifs de la conjonction avec celui du méridien des Tables.

91. *Démonstration.* Comme nous avons $ht - n = N = \Sigma \sin\varphi$, et $\Delta - m + \delta t = M = \Sigma\cos\varphi$ (n° 22), on aura

$$t = \frac{\Sigma\sin\varphi + n}{h} = \frac{\Sigma\cos\varphi - (\Delta - m)}{\delta};$$

d'où il suit, en supposant $\tan\alpha = \frac{\delta}{h}$,

$$(\Sigma\sin\varphi + n)\tan\alpha = \Sigma\cos\varphi - (\Delta - m),$$

ce qui donne

$$\Sigma\cos(\varphi + \alpha) = n\sin\alpha + (\Delta - m)\cos\alpha.$$

Donc, en faisant $\frac{n\sin\alpha + (\Delta - m)\cos\alpha}{\Sigma} = \cos\lambda$, on aura $\varphi = \pm\lambda - \alpha$; et par conséquent $t = \frac{\Sigma\sin(\pm\lambda - \alpha) + n}{h}$: ainsi, le temps de la conjonction $T - t$ sera connu.

92. *Exemple.* On demande quels ont été, sous le parallèle boréal de 50°, les lieux qui ont observé à l'horizon le commen-

Digitized by Google

cement on la fin de l'éclipse du 1er avril 1764. Nous trouvons d'abord pour ce parallèle $P = 49^\circ\ 40'\ 56''$, $p = 53',985$; ensuite $H = \pm 95^\circ\ 42'\ 40''$, $n = \pm 34',756$, $m = 41',308$, $\Delta = 44',857$, $\mathcal{S} = 13',14$, $h = 23',953$, $\alpha = 28^\circ\ 44'\ 50''$, $\Sigma = 30',610$; d'où l'on tire $\lambda = \pm 116^\circ 23'\ 20''$ pour l'horizon oriental, et $\lambda = \pm 49^\circ 37'\ 40''$ pour l'occidental. Sous le parallèle austral de 50°, on ne pourrait pas observer à l'horizon les contacts dont il s'agit, parce qu'en faisant m négatif, cos λ devient plus grand que le rayon, quel que soit le signe de n.

93. Ainsi dans le premier cas, où $T = 5^h\ 37'\ 9''$ du matin, nous aurons

pour le commencement,	pour la fin,
$t = -2^h,1817$	$t = +0^h,1745$
conj. = $7^h\ 48'\ 4''$	conj. = $5^h\ 47'\ 37''$
longit. du l. = $3^h\ 21'\ 43''$ occ.	longit. du l. = $5^h\ 22'\ 9''$ occ.

Dans le second cas, où l'on a $T = 6^h\ 22'\ 51''$ du soir, on trouve

pour le commencement,	pour la fin,
$t = -0^h,19945$	$t = 1^h,9064$
conj. = $6^h\ 10'\ 53''$	conj. = $4^h\ 28'\ 28''$
longit. du l. = $7^h\ 1'\ 7''$ or.	longit. du l. = $5^h\ 18'\ 22''$ or.

M. Du Séjour (page 154) a trouvé, pour ce dernier cas, les différences de longitude $7^h\ 1'\ 15''$, et $5^h\ 18'\ 27''$.

94. Il convient de remarquer, que si, ce problème se borne à donner les seuls lieux du parallèle qui verront les contacts extérieurs à l'horizon, c'est parce que nous avons pris pour la distance des centres Σ la somme des demi-diamètres, et pour H l'angle horaire de l'astre lorsqu'il est dans l'horizon du parallèle proposé. Nous l'avons ainsi limité, afin de l'appliquer à la construction des cartes qui représentent les circonstances des éclipses sur la Terre, et dans lesquelles on ne trace que les lignes qui en représentent le commencement et la fin au lever et au coucher du Soleil. On peut néanmoins résoudre le même problème, pour toute autre distance Σ, et pour un angle horaire quelconque H du parallèle donné. Mais avant de commencer ces calculs, il

Digitized by Google

faudra déterminer les limites où s'étend leur possibilité : c'est ce que nous allons voir.

95. *Déterminer les limites des parallèles entre lesquelles il est possible d'observer l'éclipse à l'horizon.*

En supposant les définitions précédentes, il faut chercher la valeur de l'angle ω par l'équation

$$\sin\omega = \frac{\Delta\cos\alpha \pm \Sigma}{p},$$

et les limites que l'on demande seront déterminées par l'équation

$$\sin P = \sin(\omega \pm \alpha)\cos D.$$

Si les valeurs $\Delta\cos\alpha + \Sigma$, $\Delta\cos\alpha - \Sigma$ sont toutes les deux plus petites que p, ω aura deux valeurs dont chacune fournira deux autres valeurs de P: celles qui proviennent de $\Delta\cos\alpha + \Sigma$ seront les limites du côté boréal; et celles qui dérivent de l'expression $\Delta\cos\alpha - \Sigma$ seront les limites du côté austral. Si l'une ou l'autre de ces valeurs est $> p$, il n'y aura point de limites de ce côté-là, parce qu'une partie de l'éclipse tombe hors de la Terre. Il y aura, néanmoins dans ce cas, une limite où le Soleil cesse de se cacher sous l'horizon, ou de paraître au-dessus, et c'est celle où H cesse d'être réel pour devenir imaginaire, ou lorsque $P = 90° - D$. Quant au double signe de α, le signe $-$ sert pour la limite dans la partie orientale de l'horizon, et le signe $+$ pour la partie occidentale.

96. *Démonstration.* Il est évident qu'on trouvera les limites cherchées, en supposant que λ passe du réel à l'imaginaire, c'est-à-dire, lorsque $n\sin\alpha + (\Delta - m)\cos\alpha = \pm\Sigma$ (n° 90). Mais la condition de $\cos H = -\tang D\tang P$, ou de..... $\sin H = \pm\sqrt{(1 - \tang^2 D\tang^2 P)}$, donne

$$m = p\sin P\cos D + p\frac{\sin P\sin^2 D}{\cos D} = \frac{p\sin P}{\cos D}, \text{ et}$$

$$n = p\cos P\sin H = p\sqrt{\left(\cos^2 P - \frac{\sin^2 P\sin^2 D}{\cos^2 D}\right)} = p\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)}.$$

Donc, en substituant ces valeurs de m et de n, et faisant $\frac{\Delta\cos\alpha \pm \Sigma}{p} = \sin\omega$, on obtient

$$\frac{\sin P\cos\alpha}{\cos D} \pm \sin\alpha\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)} = \sin\omega :$$

Digitized by Google

et si l'on fait encore $\frac{\sin P}{\cos D} = \sin \Psi$, on aura $\sin \Psi \cos \alpha \pm \sin \alpha \cos \Psi = \sin \omega$; partant, $\Psi \pm \alpha = \omega$, et par conséquent

$$\sin P = \sin (\omega \pm \alpha) \cos D.$$

97. *Exemple.* Nous avons dans la même éclipse $\alpha = 28^\circ\ 44'\ 50''$, $\Delta \cos \alpha = 39{,}328$, $\Sigma = 30'{,}610$, et en supposant $p = 54'$, qui est sa valeur moyenne dans cette éclipse, nous trouverons d'abord que $\Delta \cos \alpha + \Sigma$ est plus grand que p, et que par conséquent il n'y a d'autres limites du côté boréal, que celle de $P = 90^\circ - D = 85^\circ\ 10'\ 29''$. On a ensuite, $\Delta \cos \alpha - \Sigma = 8'{,}718$, valeur plus petite que p, par conséquent $\omega = 9^\circ\ 17'\ 20''$, d'où l'on tire $P = -19^\circ\ 22'\ 50''$ pour la limite orientale, et $P = 37^\circ\ 52'\ 50''$ pour l'occidentale. Ces limites sont suffisamment exactes; mais si l'on en desire de plus rigoureuses, on cherchera les parallaxes correspondantes à ces premières valeurs de P, et on trouvera $54'{,}129$ et $54'{,}048$; la première de ces parallaxes donne $\omega = 9^\circ\ 17'\ 7''$ et $P = -19^\circ\ 24'\ 24''$; la seconde $\omega = 9^\circ\ 16'\ 57''$ et $P = 37^\circ\ 52'\ 15''$; déduisant de là les latitudes vraies correspondantes à ces dernières valeurs de P, on aura pour limites, le parallèle austral de $19^\circ\ 36'\ 37''$ et le parallèle boréal de $38^\circ\ 11'\ 1''$. M. Du Séjour (page 159) a trouvé $19^\circ\ 36'\ 12''$, et $38^\circ\ 10'\ 50''$.

98. Ainsi, dans cette éclipse, les calculs du problème précédent auraient dû commencer du parallèle austral de $19^\circ\ 37'$ vers le Nord, afin de déterminer la longitude des lieux qui en observeraient les contacts extérieurs au lever du Soleil; et porter en même temps, depuis le parallèle boréal de $38^\circ\ 11'$, les calculs relatifs au coucher de cet astre; en observant que les calculs faits pour chaque parallèle austral serviront en même temps (n° 90) pour le parallèle boréal correspondant: on procédera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive au parallèle boréal de $85^\circ\ 10'\ 29''$, où finit la possibilité du lever et du coucher du Soleil dans le jour de la même éclipse. Mais avant d'arriver à ce parallèle, et dans son voisinage, il y en a un autre très-remarquable, et que nous allons déterminer par le problème suivant.

Digitized by Google

99. *Déterminer le lieu particulier d'où l'on pourra observer le commencement et la fin de l'éclipse dans l'horizon, de manière que sa durée s'y prolonge pendant toute la journée ou pendant toute la nuit.*

Soit t le temps du commencement ou de la fin de l'éclipse compté depuis le passage de l'astre par le méridien, p la parallaxe correspondante à une latitude égale au complément de la déclinaison, peu différente de celle du lieu que l'on cherche, Σ la somme des demi-diamètres horizontaux; faisons $h' = h \pm \gamma' p \sin D$,

$\text{tang } \alpha' = \frac{\delta}{h'}$, et $\cos \varphi = \frac{(\Delta - p)\cos \alpha'}{\Sigma}$, nous aurons

$$t = \pm \frac{\Sigma \sin \varphi \cos \alpha'}{h'}, \quad \text{tang } P = \text{cotang } D \cos \gamma t,$$

$$\text{et le temps de la conj.} = \left\{ \begin{matrix} \text{midi ou} \\ \text{minuit} \end{matrix} + \frac{(\Delta - p) \sin \alpha' \cos \alpha'}{h'} \right\}.$$

Dans l'expression de h' on prendra le signe $+$ lorsque D et p seront de la même dénomination, et le signe $-$ quand ils seront de dénomination contraire : bien entendu qu'ici p doit suivre toujours la dénomination de Δ. Dans le premier cas, le temps de la conjonction se compte depuis minuit, et dans le second, depuis midi.

100. *Démonstration.* Il est évident que ce phénomène singulier ne peut avoir lieu, que dans le cas où Δ est un peu considérable, et qu'en prenant p dans la direction de Δ, on doit entendre que ces deux quantités auront le même signe, surtout en observant que p remplace ici une autre ligne qui tombe toute entière du côté du Nord ou du côté du Sud, comme nous le verrons tout-à-l'heure. On voit d'ailleurs, que le phénomène ne saurait avoir lieu que pendant la nuit, lorsque D et Δ seront de la même dénomination, et que pendant le jour, lorsqu'ils seront de dénomination différente, puisqu'il faut que ces temps soient courts pour correspondre à la durée de l'éclipse. Et comme, par la condition de la question, le milieu de l'éclipse est à l'instant du passage du soleil par le méridien, cet instant étant à peu près celui de la plus grande phase, il s'ensuit que le lieu cherché doit observer la plus courte distance des centres à midi, ou à

minuit, cette question pourra donc être résolue par le moyen dont nous nous sommes servis dans les problèmes nos 36, 44.

101. Concevons donc que le méridien CK (fig. 3) coïncide avec RL, et que lorsque l'astre s'y trouve au point S, la Lune soit en p, c'est-à-dire, dans la perpendiculaire à l'orbite apparente PL, tracée dans la supposition que l'astre reste fixe en S pendant toute la durée de l'éclipse. Comme la conjonction a lieu lorsque la Lune arrive au point L, la ligne pL réduite en temps, donnera la distance de la Lune à midi, ou à minuit : pareillement, SP étant égal à Σ, la ligne PL réduite en temps, donnera la demi-durée de l'éclipse, et par conséquent on en dédnira le commencement et la fin, ainsi que l'angle horaire, d'où l'on pourra conclure la latitude du lieu.

102. Ainsi, comme on a $RL = \Delta$, $RS = p \sin P \cos D - p \sin D \cos P \cos H$, et que d'ailleurs la condition du problème, donne $\cos H = \pm 1$; si l'on se sert du signe + lorsque P et D seront de différente dénomination, et du signe — quand ils auront la même dénomination (n° 100), on aura toujours

$$RS = p \sin (P + D).$$

Et puisque l'arc $90° - D$ surpasse de peu de minutes l'arc P, partant l'arc 90° surpassera de ce même nombre l'arc $P + D$, et par conséquent $\sin (P+D)$ différera très-peu du rayon, et l'on aura $RS = p$, $SL = \Delta - p$. Pareillement, dans les équations $\delta' = \delta - \gamma' q \sin H'$, $h' = h - \gamma' g \cos H'$ (n° 36), comme nous avons $\sin H' = 0$, $\cos H' = \pm 1$, et $g = p \cos P = p \sin D$ à peu près, on aura $\delta' = \delta$, et $h' = h \pm \gamma' p \sin D$. Ainsi, en faisant $\tang \alpha' = \frac{\delta}{h'}$, et $\cos \varphi = \frac{(\Delta - p) \cos \alpha'}{\Sigma}$, on en conclut aisément

$$\text{temps de la conjonction} = \left\{ \begin{matrix} 0^h \\ 12 \end{matrix} + \frac{(\Delta - p) \sin \alpha' \cos \alpha'}{h'} \right\},$$

$$t = \pm \frac{\Sigma \sin \varphi \cos \alpha'}{h'}$$

$$\tang P = \cotang D \cos \gamma t.$$

103. *Exemple.* Pour la détermination du lieu qui, dans le cas de notre éclipse, en verrait le commencement au coucher du Soleil, et la finit à son lever, nous avons $p=53',858$, $\Delta - p = -9',001$, $\Sigma=30',610$, $\delta'=13',14$, $\gamma' p \sin D=1',186$, $h'=25',139$, $\alpha'=27^\circ 35' 45''$, $\varphi=\pm 164^\circ 53' 40''$. On conclut de ces données $t=\pm 1^h 2' 30''$, $\gamma t=\pm 15^\circ 37' 40''$, $P=84^\circ 59' 30''$, la latitude du lieu $=85^\circ 2' 52''$, le commencement de l'éclipse à $10^h 57' 30''$ du soir, la fin à $1^h 2' 30''$ du matin, et la conjonction, à $11^h 51' 11''$ du soir, ce qui donne la longitude du lieu de $11^h 18' 35''$ à l'occident de Paris.

M. Du Séjour, (page 173), après une longue discussion, ne trouvant pas de moyen de résoudre cette question par des formules directes, et passant même à décider qu'il ne pouvait y en avoir aucun, revient à la méthode indirecte des fausses positions, et il conclut du résultat de celles qu'il a faites à l'égard de cette éclipse particulière, que le phénomène dont il s'agit devrait avoir eu lieu sous le parallèle boréal, de $85^\circ 5' 28''$, à la longitude de $11^h 20' 19''$ à l'occident de Paris; on comptait dans ce lieu lors du commencement de l'éclipse $10^h 57' 24''$ du soir, et à la fin $1^h 2' 36''$ du matin.

§ VI.

Des lieux de la Terre qui observeront l'éclipse centrale.

104. *Déterminer le lieu de la Terre qui verra l'éclipse centrale à l'instant du passage du Soleil par le méridien.*

La longitude de ce lieu sera connue immédiatement, parce que l'instant de la conjonction est dans ce cas, le même, que celui du passage du Soleil par le méridien à 0^h, ou à 12^h; en comparant donc ce temps avec celui de la conjonction, rapportés au méridien des tables, on aura la longitude du lieu. Quant à la latitude: en faisant $\sin \lambda = \frac{\Delta}{p}$, on aura $P = \lambda + D$.

On prendra λ toujours aigu et de la même dénomination que Δ. Lorsque $\Delta > p$, λ sera imaginaire, ce qui indiquera que cette phase ne peut avoir lieu dans le méridien, quoiqu'elle le puisse

quelque temps avant ou après, si $\Delta \cos \alpha$ n'est pas plus grand que p; et en effet, si $\Delta \cos \alpha > p$, toute l'éclipse centrale tombera hors de la Terre. Si, lorsque λ et D sont de la même dénomination, leur somme est plus grande que 90°, il faudra prendre leur différence, et on aura alors $P = \lambda - D$, et le temps, au lieu d'être 0^h, sera 12^h du soir.

105. *Démonstration.* Les deux équations

$$ht - n = \Sigma \sin \varphi, \quad \Delta + \delta t - m = \Sigma \cos \varphi \ (\text{n° 22}),$$

par la supposition de la phase centrale, c'est-à-dire de $\Sigma = 0$, se changent en $ht = n$, $\Delta + \delta t = m$; et par la condition du Soleil au méridien, on a de plus $n = 0$, $t = 0$, et par conséquent

$$\Delta = m = p \ (\sin P \cos D - \sin D \cos P \cos H);$$

mais la condition du problème donne $\cos H = 1$, on en tire

$$\Delta = p \sin (P - D),$$

et en faisant $\frac{\Delta}{p} = \sin \lambda$, nous aurons

$$P = \lambda + D.$$

Lorsque le Soleil passera au méridien entre le pôle et l'horizon; et que $\cos H = -1$, on aura

$$P = \lambda - D.$$

Ce dernier cas est facile à distinguer, parce qu'on a à-la-fois les conditions de λ et D de la même dénomination, et $\lambda + D > 90°$: or $\lambda > 90 - D$ donne $\sin \lambda > \cos D$, et $\Delta > p \cos D$; et comme $p \cos D$ marque le lieu du pôle dans le plan de la projection, Δ déterminera donc le point où l'orbite coupera le méridien au-delà du même pôle; et ce temps, au lieu d'être 0^h, sera 12^h du soir. Dans le cas particulier de $\lambda + D = 90°$, l'orbite passerait alors par le pôle même, et y couperait tous les méridiens, et il est évident que dans ce cas le temps resterait indéterminé, ainsi que la longitude du lieu. Mais, dans le voisinage des pôles, la plus petite erreur dans les quantités données en produira

Digitized by Google

une très-considérable dans la différence des longitudes, mais sans grande conséquence, parce qu'elle correspondra à un très-petit espace sur la Terre.

106. *Exemple.* En supposant, dans la même éclipse, $\Delta = 44',857$, et $p = 54',01$, on trouve $\lambda = 56^\circ\,9'$, et $P = 60^\circ\,59'$, à très-peu de chose près. Et comme à cette valeur de P correspond $p = 53',929$, en répétant le calcul, on trouvera de nouveau $\lambda = 56^\circ\,16'\,55''$, $P = 61^\circ\,6'\,26''$, et la latitude du lieu $61^\circ\,22'\,38''$; dans lequel, la conjouction étant à midi, et à Paris à $11^h\,9'\,46''$ du matin, la différence de longitude sera $0^h\,50'\,14''$ vers l'orient. M. Du Séjour (pag. 88) trouve $61^\circ\,51'\,26''$ et $0^h\,49'\,52''$.

107. *Déterminer les deux lieux qui observeront l'éclipse centrale dans l'horizon, et la durée de cette éclipse sur la Terre.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier de celui du n° 87, en y supposant $\Sigma = 0$. Si l'on fait donc $\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha}{p}$, on aura $\sin P = \sin(\lambda \pm \alpha)\cos D$, $\cos H = -\operatorname{tang} D \operatorname{tang} P$, $t = \frac{p\cos P\sin H}{h}$; on se servira de ces formules de la même manière qu'on l'a fait n° 87.

108. *Exemple.* En supposant, dans la même éclipse, $\alpha = 28^\circ\,44'\,50''$, $\Delta\cos\alpha = 39',328$, et $p = 54',01$, on trouvera $\lambda = 46^\circ\,44'$, ce qui donnera $P = 17^\circ\,55'$ pour le lever du Soleil, et $P = 74^\circ\,43'$ pour le coucher; les valeurs de p correspondantes à ces latitudes, sont $p = 54',134$, et $p = 53',878$. Et en répétant le calcul pour chacun de ces lieux en particulier, nous aurons,

pour le premier lieu,		pour le second lieu,	
$\lambda =$	$46^\circ\,35'\,35''$	$\lambda =$	$46^\circ\,53'$
$P =$	$17\;46\;30$	$P =$	$74\;51\;30''$
latit. =	$17\;58\;52$	latitude =	$75\;0\;52$
$H =$	$-91\;33\;5$	$H =$	$108\;10\;40$
$T =$	$5^h\,53'\,48''$ du matin	$T =$	$7^h\,12\;43$ du soir
$t =$	$-\;2\;9\;5$	$t =$	$0\;33\;30$
conjonc. =	$8\;2\;53$ du matin	conjonct. à....	$6\;39\;13$
diff. de long. =	$-\;3^h\,6'\,53''$ occ. de Paris.	diff. de long. =	$7^h\,29'\,27''$ or. de Paris.

Digitized by Google

M. Du Séjour trouve (page 88)

latitude =	18° 5′ 24″	latitude =	75° 7′ 22″
diff. de long. =	3ʰ 7′ 26″	diff. de long. =	7ʰ 29′ 40″

Et comme nous trouvons que l'éclipse centrale a commencé sur la Terre à 2ʰ 9′ 5″ avant la conjonction, et qu'elle a fini à 0ʰ 33′ 30″ après la même conjonction, sa durée a donc été de 2ʰ 42′ 35″.

109. *Déterminer le lieu qui observe l'éclipse centrale lorsque l'on y compte une certaine heure donnée.*

Au moyen du temps donné T, on trouvera d'abord l'angle H; faisant ensuite

$$\frac{\sin D \cos H + \sin H \tan g\, a}{\cos D} = \tan g\, \Psi, \text{ et } \frac{\Delta \cos \Psi}{p \cos D} = \sin \lambda,$$

on aura

$$P = \lambda + \Psi, \quad t = \frac{p \cos P \sin H}{h}, \text{ temps de la conj.} = T - t.$$

L'angle Ψ est toujours aigu, et il est censé être de dénomination boréale ou australe, selon que le numérateur de l'expression de tang Ψ est positif ou négatif; l'angle λ est pareillement supposé moindre que 90°, et de la même dénomination que Δ. Les temps T, $T \pm 12^h$ donnent les mêmes valeurs absolues de Ψ et de λ, l'angle Ψ seulement changera de signe dans les deux derniers; ce qui fournit une autre solution $P = \lambda - \Psi$, pourvu que le Soleil, dans ce cas, ne se trouve pas sous l'horizon. Lorsque λ et Ψ sont de la même dénomination, et que leur somme est plus grande que 90°, l'orbite passera au-delà du pôle, et le phénomène ne sera pas possible à l'heure proposée; mais en changeant la dénomination de Ψ, il aura lieu pour l'heure $T \pm 12^h$, si néanmoins $\frac{\Delta \cos \Psi}{p \cos D}$ ne devient pas plus grand que le rayon.

110. *Démonstration.* Les deux équations $ht = n$, $\Delta + \delta t = m$ (n° 105) donnent

$$t = \frac{n}{h} = \frac{m - \Delta}{\delta} :$$

Digitized by Google

et en faisant toujours tang $\alpha = \frac{\delta}{h}$, on aura

$$m - n \text{ tang } \alpha = \Delta.$$

Substituant maintenant dans cette équation les valeurs de m et de n, qui renferment l'inconnue P, nous aurons $p \sin P \cos D - p \sin D \cos P \cos H - p \cos P \sin H \text{ tang } \alpha = \Delta$, et par conséquent

$$\sin P - \frac{\sin D \cos H + \sin H \text{ tang } \alpha}{\cos D} \cdot \cos P = \frac{\Delta}{p \cos D}.$$

Donc, en faisant

$$\frac{\sin D \cos H + \sin H \text{ tang } \alpha}{\cos D} = \text{tang } \Psi, \text{ et } \frac{\Delta \cos \Psi}{p \cos D} = \sin \lambda,$$

on aura

$$\sin (P - \Psi) = \sin \lambda,$$
$$P = \lambda + \Psi.$$

Observons maintenant que pour les temps $T \pm 12^h$, ou, ce qui revient au même, pour les angles $H \pm 180°$, il n'y aura qu'à changer le signe dans les valeurs $\sin H$, et $\cos H$, et que par conséquent, Ψ admet deux valeurs égales de signe contraire; mais comme cet angle est censé être toujours aigu, $\cos \Psi$ sera toujours positif, et par conséquent, λ ne changera ni de valeur ni de signe. Ainsi, avec les mêmes nombres, on aura une seconde solution pour les temps $T \pm 12^h$, pourvu cependant qu'il ne s'ensuive pas, d'après la valeur trouvée pour P, que le Soleil soit alors au-dessous de l'horizon.

111. Il est également facile de voir que dans le cas où l'orbite passerait par le pôle, où les ellipses, qui sont les projections des parallèles sur le plan de projection, finissent en un point, comme on a alors $\Delta = p \cos D$, on aura $\sin \lambda = \cos \Psi$, et par conséquent $\lambda = 90° - \Psi$, et $P = \lambda + \Psi = 90°$, d'où il suit que $t = 0$; tandis que H, au lieu de la valeur proposée, peut avoir une autre valeur quelconque, qui donnera toujours le même résultat $P = 90°$. Si l'on suppose donc $\lambda > 90° - \Psi$, ou $\lambda + \Psi > 90°$, l'orbite passera au-delà du pôle, et le phénomène ne sera pas

Digitized by Google

possible pour l'heure donnée T, mais bien pour l'heure $T \pm 12^h$, en changeant le signe de Ψ, si toutefois λ n'est point imaginaire.

112. *Exemple.* On demande le lieu qui a vu l'éclipse centrale à 7 heures du matin, le premier avril 1764. On a donc $H = -75°$, on trouve $\Psi = -27° 1' 0''$, et 12^h heures après, c'est-à-dire, à 7 heures du soir, on aura $\Psi = 27° 1' 0''$ (n° 110). Si maintenant on prend $p = 54',01$, on trouvera $\lambda = 47° 57'$, et par conséquent $P = 20° 56'$ dans le premier cas, et $P = 74° 58'$ dans le second. A ces deux valeurs de P correspondent celles de $p = 54',127$, et $p = 53',877$; avec ces dernières valeurs, on répétera le calcul, et l'on aura, pour les 7 heures du matin, $\lambda = 47° 48' 37''$, $P = 20° 47' 37''$, la latitude du lieu $= 21° 0' 23''$, $t = -2^h 2' 26''$, la conjonction à $9^h 2' 26''$ du matin, et la différence de longitude $2^h 7' 20''$ à l'occident de Paris. On aura pareillement, pour les 7 heures du soir, $\lambda = 48° 6' 16''$, $P = 75° 7' 16''$, la latitude du lieu $= 75° 16' 52''$, $t = 0^h 33' 28''$, la conjonction à $6^h 26' 32''$, et la différence de longitude $7^h 16' 46''$ à l'orient de Paris.

M. Du Séjour (page 84) a trouvé les latitudes $21° 7' 58''$ et $75° 23' 31''$, et les différences de longitude $2^h 7' 51''$, $7^h 18' 3''$.

113. *Sous un parallèle donné, on demande la longitude du lieu, qui observera l'éclipse centrale et l'heure qu'on y compte à l'instant de cette phase.*

En conservant les définitions précédentes, et faisant de plus

$$\text{tang } \Psi = \frac{\sin D}{\text{tang } \alpha}, \quad \sin \lambda = \frac{(\zeta - \Delta) \sin \Psi}{q} = \frac{(\zeta - \Delta) \cos \Psi}{g \text{ tang } \alpha},$$

on aura

$$H = \lambda - \Psi \text{ et } t = \frac{g \sin h}{h}.$$

L'angle Ψ doit avoir le même signe de D, et on le prendra ou aigu, ou obtus, selon que α sera positif ou négatif. L'angle λ peut être pris indifféremment aigu ou obtus, quel qu'en soit le signe; ce qui donne deux solutions différentes, pourvu cependant qu'il n'en résulte aucune valeur de H, qui indique que l'astre est au-dessous de l'horizon. Avec l'angle H, on a T et le temps de la conjonction $T - t$; d'où l'on conclut la longitude du lieu.

Digitized by Google

114. *Démonst.* En substituant dans l'équation $m - n \tang \alpha = \Delta$ (n° 110), les valeurs de $n = g \sin H$, $m = \zeta - q \cos H$ (n° 30), on aura

$$g \tang \alpha \sin H + q \cos H = \zeta - \Delta.$$

Si l'on fait maintenant $\tang \Psi = \frac{q}{g \tang \alpha} = \frac{\sin D}{\tang \alpha}$, $\sin \lambda = \frac{(\zeta - \Delta) \sin \Psi}{q}$ $= \frac{(\zeta - \Delta) \cos \Psi}{g \tang \alpha}$, on aura $\sin (H + \Psi) = \sin \lambda$, et par conséquent

$$H = \lambda - \Psi, \quad \text{et} \quad t = \frac{g \sin H}{h}.$$

115. *Exemple.* Sous le parallèle boréal de 48° 51′, on demande la longitude du lieu, et l'heure qu'on y comptait lors de l'observation de l'éclipse centrale le 1er avril 1764. On aura dans ce cas, $P = 48° 51' 50''$, $p = 53', 990$, $\Delta = 44', 857$, $\zeta = 40', 312$, log. $g = 1,553316$, log. $q = 0,478207$; et par conséquent, $\Psi = 8° 43' 6''$, $\lambda = - 13° 14' 30''$, $H = - 21° 57' 36''$; $T = - 1^h 27' 50'' = 10^h 32' 10''$ du matin, $t = - 0^h 33' 29''$, la conjonction à $11^h 5' 39''$, et la différence de longitude $0^h 4' 7''$ à l'occident de Paris. L'autre valeur, $H = - 175° 28' 36''$, appartient à un lieu du même parallèle qui se trouve alors sous l'horizon, et d'où l'on pourrait voir le même phénomène, si la Terre était transparente.

116. M. Du Séjour donne (page 83) l'heure du phénomène $10^h 31' 16''$, et la différence de longitude $4' 49''$ à l'occident de Paris; mais cette discordance ne provient que d'une faute qui s'est glissée dans le calcul du logarithme de $\frac{\cos \theta \sin \lambda \cos \xi}{\varrho \sin \varphi \sin (\pi - p)}$ (page 81), lequel n'est pas 0,1747834, mais bien 0,1740407, et avec celui-ci il aurait dû trouver l'heure du lieu $10^h 32' 11''$, et la différence de longitude $0^h 4' 6''$.

Il en est de même pour les calculs relatifs au problème précédent; car si aux logarithmes fautifs 9,7481183, 9,9229007 (page 81), l'on substituait les véritables 9,7481283, 9,9221690, on trouverait les latitudes 21° 1′ 28″, et 75° 17′ 5″, etc. Nous ne nous arrêterons pas sur l'examen assez inutile de quelques discordances

Digitized by Google

que nous pourrions trouver par la suite entre nos résultats et ceux de M. Du Séjour. Ce seul exemple suffit.

117. *Déterminer les limites des parallèles terrestres, entre lesquelles on peut observer l'éclipse centrale.*

Ayant fait $\text{tang}\,\Psi = \frac{\sin D}{\text{tang}\,\alpha}$, comme dans le problème précédent, soit de plus $\text{tang}\,\chi = \frac{\text{tang}\,D}{\sin\Psi} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos D\cos\Psi}$, $\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\Psi}{p\cos D}$; et on aura

$$P = \lambda \pm \chi.$$

Les angles Ψ et χ sont déterminés de signe et d'espèce par la même règle souvent répétée, et l'angle λ suit la dénomination de Δ.

118. *Démonstration.* Les limites cherchées sont évidemment celles où l'angle λ, du problème précédent, passe du réel à l'imaginaire, c'est-à-dire, où $(\zeta - \Delta)\sin\Psi = \pm q$; substituant donc dans cette équation les valeurs de $\zeta = p\,\sin P\,\cos D$, et de $q = p\,\sin D\,\cos P$, nous aurons

$$\sin P\sin\Psi \mp \text{tang}\,D\cos P = \frac{\Delta\sin\Psi}{p\cos D};$$

et si, dans cette dernière, l'on met $\text{tang}\,\chi$ à la place de $\frac{\text{tang}\,D}{\sin\Psi}$, et $\sin\lambda$ à la place de $\frac{\Delta\cos\chi}{p\cos D}$, on aura enfin

$$P = \lambda \mp \chi.$$

Les formules (n° 117), dans le cas de $\alpha = 0$, donnent $\Psi = 90°$, $\chi = D$, et $\sin\lambda = \frac{\Delta}{p}$; lorsque $D = 0$, il vient $\Psi = 0$, $\chi = \alpha$, $\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha}{p}$; et si l'on suppose en même temps $\alpha = 0$, $D = 0$, on aura $\chi = 0$, et, dans ce cas, les deux limites coïncideront sur un seul parallèle déterminé par l'équation $\sin P = \frac{\Delta}{p}$.

119. *Exemple.* On aura, dans la même éclipse, $\Psi = 8°\,45'\,6''$, et $\chi = 29°\,6'\,55''$; et en prenant $p = 64'',01$, on trouvera $\lambda = 46°\,44'$, ce qui donnera $P = 17°\,37'$, et $P = 75°\,51'$ à peu de chose

près. A ces deux valeurs de P correspondent $p = 54'',135$, $p = 53'',876$. En répétant les calculs avec ces nouvelles valeurs de p, on trouvera, pour la première limite,

$\lambda = 46° 35' 34''$, $P = 17° 28' 39''$, et la latitude $= 17° 39' 43''$;

et pour la seconde,

$\lambda = 46° 53' 5''$, $P = 76° 0' 0''$, et la latitude $= 76° 9' 4''$.

M. Du Séjour (page 85) donne $17° 47' 10''$ et $76° 15' 26''$.

En commençant donc les calculs du problème 113, depuis le parallèle boréal de $17° 40'$ jusqu'à celui de $76° 9'$, on trouverait les longitudes des points des parallèles intermédiaires où l'éclipse centrale aurait pu être observée, et l'heure qu'on aurait dû compter dans chacun de ces points lors de l'observation du phénomène. Mais comme on est dans l'usage de donner ces points, dans les cartes des éclipses, non pas suivant les latitudes, mais bien par rapport aux heures qu'on y compte, on se servira pour cela du problème n° 109.

§ VII.

Des plus grandes phases.

120. *Étant donnée la plus courte distance des centres, trouver la plus grande phase, ou réciproquement.*

Soit le demi-diamètre horizontal de la Lune $= \sigma$, celui du Soleil, réduit au plan de projection $= s'$, la plus courte distance des centres dans le plan de projection $= \Sigma'$, et le nombre de doigts de la plus grande phase $= d$. D'après ce que nous avons démontré n° 42, on aura $d = \frac{6(\sigma + s' - \Sigma')}{s'}$, et par conséquent $\Sigma' = \sigma + s'\left(1 - \frac{d}{6}\right)$.

121. Dans la première de ces équations, on prend toujours la différence entre la somme des demi-diamètres et la plus courte distance sans faire attention au signe particulier de cette dernière quan-

Digitized by Google

tité; et d devient boréal ou austral, selon que ce signe est positif ou négatif. Dans la seconde, on suppose d toujours positif; et Σ' sera positif, pour les doigts du côté boréal, et négatif pour ceux du côté austral. Ainsi, si l'on fait $d = 12$, on aura, pour le contact intérieur des limbes austraux, $\Sigma' = \sigma - s'$, et pour celui des limbes boréaux, $\Sigma = -\sigma + s'$; ces valeurs serviront pour déterminer les points par où doit passer la trace de l'éclipse, qui sera totale ou annulaire, selon que $\sigma > s'$, ou que $\sigma < s'$. Mais comme s' change de valeur selon la hauteur de l'astre sur l'horizon, il peut arriver que la même éclipse commence et finisse annulaire sur la Terre, et soit totale pendant quelqu'espace intermédiaire de son passage.

122. *On demande le lieu qui, sous un parallèle donné et à une heure déterminée, doit observer la plus grande phase, et quelle en sera la grandeur.*

Les définitions précédentes (nos 17, 30), et celle de la plus courte distance des centres dans le plan de projection $= \Sigma'$, étant supposées, calculons les quantités

$$n = g \sin H, \quad m = 6 - q \cos H, \quad \operatorname{tang} \mu = \frac{n}{m},$$

$$\sin \pi = \frac{m}{p \cos \mu}, \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\delta}{h}, \quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \sin H}{h - \gamma' g \cos H},$$

nous aurons

$$\Sigma' = \frac{\Delta \cos \alpha - p \sin \pi \cos(\mu + \alpha)}{\cos(\alpha' - \alpha)}, \quad t = \frac{n - \Sigma' \sin \alpha}{h}.$$

Le problème précédent nous donnera la grandeur de la phase; et on aura la longitude du lieu par l'équation,

$$\text{temps de la conjonct.} = T - t.$$

123. *Démonstration.* Il est évident que la distance des centres est la plus courte lorsque cette ligne devient perpendiculaire à la direction actuelle de l'orbite apparente de la Lune. Ainsi, en supposant l'astre en S et la Lune en L (fig. 4), SL sera la plus courte distance des centres, si cette ligne est perpendiculaire à la direction Lh de l'orbite apparente, et par laquelle la Lune

Digitized by Google

paraît se mouvoir par rapport à l'astre, qui reste fixe en S. Soit maintenant $hlm = \alpha'$; nous avons vu (n° 38) que l'on a

$$\text{tang } \alpha' = \frac{\delta - \gamma' g \sin H}{h - \gamma' g \cos H}.$$

Supposant donc $SL = \Sigma'$, et observant de plus que $LSm = hLm = \alpha'$, nous aurons $Lm = \Sigma' \sin \alpha'$, et $Sm = \Sigma' \cos \alpha'$. D'un autre côté, on a $Le = ht$, et $me = n$ (n°s 21, 23) : donc

$$ht = n - \Sigma' \sin \alpha'.$$

Et comme on a évidemment $Ke = cg + Sm - CK$, $CK = \Delta$, $Ke = \delta t$, $cg = RS = m$, et partant

$$\delta t = \Sigma' \cos \alpha' + m - \Delta.$$

124. Nous aurons donc

$$t = \frac{n - \Sigma' \sin \alpha}{h} = \frac{\Sigma' \cos \alpha' + m - \Delta}{\delta};$$

en substituant dans cette dernière équation tang α à la place de $\frac{\delta}{h}$, on aura

$$n \text{ tang } \alpha - \Sigma' \text{ tang } \alpha \sin \alpha' = \Sigma' \cos \alpha' + m - \Delta,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\Sigma' \cos (\alpha' - \alpha) = \Delta \cos \alpha - m \left(\cos \alpha - \frac{n}{m} \sin \alpha\right).$$

Si l'on fait maintenant tang $\mu = \frac{n}{m}$ et sin $\pi = \frac{m}{p \cos \mu}$, nous aurons

$$m \left(\cos \alpha - \frac{n}{m} \sin \alpha\right) = p \sin \pi \cos (\alpha + \mu);$$

et par conséquent $\Sigma' = \frac{\Delta \cos \alpha - p \sin \pi \cos (\alpha + \mu)}{\cos (\alpha' - \alpha)}$. Ainsi la plus courte distance apparente sera $= \Sigma' + \Sigma' \sin p \cos \pi$ (n° 22).

125. *Exemple.* Si l'on veut savoir le lieu qui, sous le parallèle boréal de 48° 51′, devrait observer la plus grande phase à 7 heures du matin, et quelle serait la quantité de cette phase. On a

$P = 48^\circ\,31'\,50''$, $p = 53',990$, $H = -75^\circ$, $\log g = 1.553316$, $\log q = 0.478207$, $\log \gamma' = 9.417969$, $\log n = -1.538259$, $\log m = 1.596971$, $\mu = -41^\circ\,8'\,20''$, $\pi = 76^\circ\,28'\,50''$, $\alpha' = 32^\circ\,50'\,50''$, $\alpha = 28^\circ\,44'\,50''$. D'où l'on tire $\Sigma' = -11',973$, $\Sigma' \sin p \cos\pi = -0',044$, et la plus courte distance apparente $= -12',017 = -12'\,1''$; et comme on trouve de plus $t = -1^h\,10'\,14''$, on en conclut la conjonction à $8^h\,10'\,14''$, et la longitude du lieu $2^h\,59'\,32''$ à l'occident de Paris. M. Du Séjour (page 31) a trouvé précisément le même résultat.

Quant à la quantité de la phase : en supposant $\sigma = 14',727$, et $s = 15',883$, nous aurons $s.\sin p \cos\pi = 0',058$, et par conséquent $s' = 15',825$, d'où l'on conclut $d = 7,044$ doigts vers la partie australe. On aurait trouvé les mêmes valeurs, si l'on eût employé le demi-diamètre horizontal du Soleil, avec le demi-diamètre apparent de la Lune $14',781$, et la plus courte distance apparente $-12',017$,

126. *On demande le lieu qui doit observer une plus grande phase donnée lors du passage du Soleil par son méridien.*

En prenant la valeur moyenne de p et celle de Σ' déterminée au moyen des demi-diamètres horizontaux, et faisant ensuite

$$\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha - \Sigma'}{p\cos\alpha},$$

on aura une première valeur approchée de

$$P = \lambda \pm D,$$

avec laquelle on déterminera le p correspondant, ainsi que la valeur de $s' = s - s\sin p\cos\lambda$, et par conséquent celle de Σ'(n° 120), on calculera enfin la valeur de α' par l'équation $\tang\alpha' = \frac{\delta}{h \mp \gamma' g}$. Si l'on fait maintenant $\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha - \Sigma'\cos(\alpha' - \alpha)}{p\cos\alpha}$, on aura

$$P = \lambda \pm D,$$

et

$$t = -\frac{\Sigma'\sin\alpha'}{h}.$$

Digitized by Google

Ce problème se réduit à celui du n° 104, en faisant $\Sigma' = 0$; et d'après ce que nous y avons dit, on distinguera quand le passage doit arriver à 0^h, ou à 12^h, en observant aussi que dans l'expression $h \mp \gamma' g$ le signe — sert pour le premier cas, et + pour le second.

127. *Démonstration.* Comme l'on a, dans ce cas, $\sin H = 0$, $\cos H = \pm 1$, en substituant ces valeurs dans les équations du n° 122, on aura $n = 0$, $m = \zeta \mp q = p \sin (P \mp D)$ (n° 9), $\mu = 0$, $\sin \pi = \sin (P \mp D)$, $\tang \alpha' = \frac{\delta}{h \mp \gamma' g}$, et $\Sigma' = \frac{\Delta \cos \alpha - p \cos \alpha \sin (P \mp D)}{\cos (\alpha' - \alpha)}$; si l'on fait maintenant ..... $\sin \lambda = \frac{\Delta \cos \alpha - \Sigma' \cos (\alpha' - \alpha)}{p \cos \alpha}$, on aura $P = \lambda \pm D$, en prenant le signe + dans le cas de $H = 0$, et le signe — lorsque $H = 180°$.

128. *Exemple.* On demande en quel lieu la plus grande phase de notre éclipse a été de 9 doigts, et à midi. En prenant $\sigma = 14',727$, et $s = 15',883$, nous aurons (n° 120) $\Sigma' = 6',786$ à-peu-près; et en supposant $p = 54',01$, nous trouverons $\lambda = 43° 25'$, et la valeur approchée de $P = 48° 15'$. Avec cette valeur, on obtiendra $p = 53',99$, et toutes les deux donneront $\alpha' = 42° 16' 50''$. On trouvera également le demi-diamètre réduit du Soleil $s' = 15',702$, avec lequel on aura la valeur exacte de $\Sigma' = 6',876$, et partant celles de $\lambda = 43° 36' 0''$, $P = 48° 25' 31''$, et la latitude du lieu $= 48° 44' 41''$. Comme on trouve d'ailleurs $t = -0^h 11' 35''$, et que l'on a $T = 0^h$, on aura donc le temps de la conjonction $T - t = 0^h 11' 35''$, et par conséquent la longitude du lieu sera de $1^h 1' 49''$ à l'orient de Paris. En supposant Σ' négatif, et en suivant les mêmes procédés, on trouve la première valeur de $\lambda = 76° 52'$, et de $P = 81° 41'$; et si l'on continuait le calcul, on saurait sous quel point du Globe on pourrait observer à midi une plus grande phase de 9 doigts australx.

129. *Déterminer les lieux qui verront une plus grande phase donnée au lever, ou au coucher du Soleil.*

Dans ce cas, où $s' = s$, la première valeur de Σ' (n° 120) sera exacte. En faisant donc $\sin \lambda = \frac{\Delta \cos \alpha - \Sigma}{p}$, et en substituant

à p sa valeur moyenne, on aura, pour déterminer la valeur approchée de P, l'équation

$$\sin P = \sin(\lambda \mp \alpha)\cos D.$$

Avec cette valeur de P, on trouvera la vraie valeur de p, et avec ces deux quantités, on calculera la valeur de α' par la formule

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{\delta \pm \gamma' p \sin D \cos(\lambda \mp \alpha)}{h + \gamma' p \sin D \sin(\lambda \mp \alpha)}.$$

En supposant de nouveau

$$\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha - \Sigma'\cos(\alpha' - \alpha)}{p},$$

on aura

$$\sin P = \sin(\lambda \mp \alpha)\cos D,\ \cos H = -\text{tang}\,D.\text{tang}\,P,\ t = \frac{n - \Sigma'\sin\alpha'}{h}.$$

Ce problème se réduit également à celui du n° 107, lorsque $\Sigma' = 0$; et pour ce qui regarde les doubles signes, les supérieurs se rapportent au lever du Soleil, et les inférieurs au coucher de cet astre.

130. *Démonstration.* En substituant dans l'équation

$$\Sigma'\cos(\alpha' - \alpha) = n\sin\alpha - m\cos\alpha + \Delta\cos\alpha \quad (\text{n° } 124),$$

les valeurs de

$$n = \pm p\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)},\quad m = \frac{p\sin P}{\cos D} \quad (\text{n° } 96),$$

et faisant d'abord

$$\sin\lambda = \frac{\Delta\cos\alpha - \Sigma'\cos(\alpha' - \alpha)}{p},$$

on aura

$$\frac{\sin P\cos\alpha}{\cos D} \pm \sin\alpha\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)} = \sin\lambda.$$

Si l'on fait ensuite $\sin\chi = \frac{\sin P}{\cos D}$, on aura

$$\sin(\chi = \alpha) = \sin\lambda,\ \chi = \lambda \mp \alpha,\ \sin P = \sin(\lambda \mp \alpha)\cos D.$$

Or, comme on a, dans ce cas, $\cos H = -\text{tang}\,D\,\text{tang}\,P$ (n° 8),

l'équation $\text{tang}\,\alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \sin H}{h - \gamma' g \cos H}$ (n° 123), donnera

$$q \sin H = \mp p \sin D \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 P}{\cos^2 D}\right)} = \mp p \sin D \cos(\lambda \mp \alpha);$$

et $$g \cos H = -p \sin P \,\text{tang}\, D = -p \sin D \sin(\lambda \mp \alpha);$$

et par conséquent

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{\delta \pm \gamma' p \sin D \cos(\lambda \mp \alpha)}{h + \gamma' p \sin D \sin(\lambda \mp \alpha)}.$$

131. *Exemple.* Supposons que l'on veuille déterminer les lieux qui, dans l'éclipse du premier avril 1764, devraient observer, comme plus grande phase, le contact extérieur du limbe boréal du Soleil, au lever, ou au coucher de cet astre.

Nous avons pour lors $\Sigma' = \sigma + s = 30',610$; et en prenant $p = 54',01$, on trouvera $\lambda = 9^\circ\ 17'\ 20''$. Nous aurons donc au lever du Soleil, $\lambda - \alpha = -19^\circ\ 27'\ 30''$, $P = -19^\circ\ 23'\ 10''$, $p = 54',129$, $\alpha' = 31^\circ\ 11'\ 40''$, $\Sigma' \cos(\alpha' - \alpha) = 30',583$. D'où l'on conclut les valeurs exactes, $\lambda = 9^\circ\ 17'\ 50''$, $\lambda - \alpha = -19^\circ\ 27'\ 0''$, $P = -19^\circ\ 22'\ 40''$, la latitude du lieu $19^\circ\ 34'\ 44''$ australe, $H = -88^\circ\ 18'\ 0''$, $T = 6^h\ 6'\ 48''$ du matin, $t = -2^h\ 47'\ 34''$, la conjonction à $8^h\ 54'\ 22''$, et la longitude du lieu $2^h\ 15'\ 24''$ à l'occident de Paris. Pareillement, la première valeur de λ donnera, pour le coucher du Soleil, $\lambda + \alpha = 38^\circ\ 2'\ 10''$, $P = 37^\circ\ 52'\ 40''$, $p = 54,048$, etc.

132. En prenant Σ' négatif, nous trouverions deux autres lieux où la plus grande phase serait le contact extérieur dans la partie australe du Soleil. Mais en observant que dans cet exemple λ devient alors imaginaire (n° 129), on conclut de là que ce phénomène ne peut être observé d'aucun lieu de la Terre (n° 120). Dans de pareils cas, il est très-facile de déterminer la grandeur de la plus petite phase visible sur la Terre; car, cela ayant lieu lorsque $\Delta \cos \alpha - \Sigma' = p$, on aura $d = \frac{6[s + s - (p - \Delta \cos \alpha)]}{s}$ (n° 120). Ainsi, dans le cas de notre exemple, la plus petite phase australe a été de 6,02 doigts.

Digitized by Google

133. On a, dans le même cas, $\sin\lambda = 1$, ou $\lambda = 90°$; et par conséquent, les deux valeurs de P se réduisent à une seule, déterminée par l'équation $\sin P = \cos\alpha \cos D$. On a donc, dans notre éclipse, $P = 60° 53' 10''$, et la latitude $= 61° 9' 32''$. L'on voit pareillement, que le phénomène aura lieu dans l'horizon au lever du Soleil, si l'angle α est positif, et au coucher, s'il est négatif; et qu'il faut entendre le contraire pour l'hémisphère austral, où la plus petite phase sera visible dans la partie boréale du Soleil. D'après cela, on aura, dans cet exemple, $H = -98° 43' 10''$, $T = 5^h 25' 7''$ du matin, $t = -0^h 47' 24''$, la conjonction à $6^h 12' 31''$, et la longitude du lieu $4^h 57' 15''$ à l'Occident de Paris.

134. *Déterminer le lieu qui verra une plus grande phase donnée à une heure donnée.*

En faisant d'abord

$$\text{tang}\,\Psi = \frac{\sin D \cos H + \text{tang}\,\alpha \sin H}{\cos D},$$

prenant ensuite la valeur moyenne de p, et puis la valeur de Σ déduite des demi-diamètres horizontaux, vu que la réduction du demi-diamètre du Soleil est inconnue encore, et faisant de plus

$$\sin\lambda = \frac{(\Delta \cos\alpha - \Sigma')\cos\Psi}{p \cos\alpha \cos D},$$

on aura une valeur approchée de

$$P = \lambda + \Psi.$$

Avec cette valeur de P, calculons celles de p, Σ', et α', en employant, pour cette dernière, l'équation

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \sin H}{h - \gamma' g \cos H};$$

alors, en faisant de nouveau

$$\sin\lambda = \frac{[\Delta \cos\alpha - \Sigma' \cos.(\alpha' - \alpha)]\cos\Psi}{p \cos\alpha \cos D},$$

nous aurons

$$P = \lambda + \Psi,\ t = \frac{n - \Sigma' \sin\alpha'}{h},\ \text{temps de la conjonct.} = T - t.$$

Digitized by Google

L'angle Ψ est toujours aigu, positif ou négatif, selon le signe du numérateur de la tangente; λ, au contraire, peut être indifféremment obtus ou aigu, quel qu'en soit le signe; et il donnera par conséquent deux solutions, à moins toutefois que l'une d'elles, donnant $P > 90°$, ne doive pas être rejetée. D'où l'on voit que ces deux solutions ne peuvent avoir lieu ensemble que lorsque λ et Ψ seront de signe différent, et qu'en même temps le complément de λ sera moindre que Ψ. Cette remarque s'applique également au problème, du n° 109, celui-ci n'étant qu'un cas particulier auquel on réduirait le premier en faisant $\Sigma' = 0$.

135. *Démonstration.* La même équation fondamentale

$$n \sin \alpha - m \cos \alpha + \Delta \cos \alpha = \Sigma' \cos(\alpha' - \alpha) \quad (\text{n° } 124),$$

par la substitution des valeurs de

$$n = p \cos P \sin H, \text{ et } m = p \sin P \cos D - p \sin D \cos P \cos H,$$

se réduit à

$$\sin P - \cos P \left(\frac{\sin D \cos H + \operatorname{tang} \alpha \sin H}{\cos D} \right) = \frac{\Delta \cos \alpha - \Sigma' \cos(\alpha' - \alpha)}{p \cos \alpha \cos D}.$$

D'où il suit, qu'en faisant

$$\operatorname{tang} \Psi = \frac{\sin D \cos H + \operatorname{tang} \alpha \sin H}{\cos D},$$

et

$$\sin \lambda = \frac{[\Delta \cos \alpha - \Sigma' \cos(\alpha' - \alpha)] \cos \Psi}{p \cos \alpha \cos D},$$

on aura

$$\sin(P - \Psi) = \sin \lambda,$$

et

$$P = \lambda + \Psi.$$

136. Puisque pour le temps $T \pm 12^h$, et par conséquent pour l'angle horaire $H \pm 180°$, les valeurs numériques de $\sin H$ et de $\cos H$, sont les mêmes, avec des signes contraires; Ψ aura donc aussi la même valeur avec le signe contraire, et on aura, dans ce cas, $P = \lambda - \Psi$. Ces deux solutions auront lieu en même temps, pourvu cependant que l'une d'elles ne donne pas $P > 90°$, car alors l'autre seule devra être admise, et elle appartiendra au temps correspon-

Digitized by Google

dant au signe de Ψ, et cela, jusqu'à ce qu'on arrive à $\lambda = \pm 90°$, qui est la limite jusqu'où le phénomène pourra s'étendre sur la Terre.

137. *Exemple.* On demande dans quel lieu la plus grande phase de notre éclipse a été de 7,044 doigts austraux, à 7 heures du matin. On a, dans ce cas, $H = -75°$; partant, $\Psi = -27° 1' 0''$. Prenons d'abord $p = 54',01$ et $\Sigma' = -11',963$, nous en déduirons $\lambda = 75° 33' 20''$, et la valeur approchée de $P = 48° 32' 20''$. Avec ces données, nous obtiendrons les valeurs corrigées de $p = 53',990$, $\Sigma' = -11',972$, $\alpha' = 32° 50' 50''$, avec lesquelles nous aurons enfin $\Sigma' \cos(\alpha' - \alpha) = -11',942$, $\lambda = 75° 32' 50''$, et $P = 48° 31' 50''$. Cette valeur de P est celle-là même que nous avons prise pour donnée dans le problème du n° 122, et d'où nous avons déduit la grandeur de la plus grande phase 7,044 que nous venons d'employer comme donnée dans cet exemple. La valeur de t étant la même dans les deux problèmes, nous aurons aussi la même longitude du lieu.

138. Pour 7 heures du soir, on a $H = -75° + 180° = 105°$, et $\Psi = 27° 1' 0''$; et en employant la première valeur de $\lambda = 75° 33' 20''$, on aurait $P = 102° 34' 20''$; d'où l'on peut conclure que la phase proposée ne saurait être vue d'aucun endroit de la Terre, au moment qu'on y compterait 7 heures du soir. Il y a néanmoins un second endroit qui l'observerait à 7 heures du matin : car, λ et Ψ ayant des signes contraires (n° 137), en prenant λ obtus, c'est-à-dire, $\lambda = 104° 26' 40''$, on a $P = 77° 25' 40''$; et en opérant comme ci-dessus, on trouvera de nouveau $\lambda = 104° 55'$, $P = 77° 4'$, et la latitude du lieu $= 77° 12' 28''$; et ensuite, $t = -0^h 12' 26''$, la conjonction à $7^h 12' 26''$ du matin, et la longitude du lieu $3^h 57' 20''$ à l'occident de Paris.

139. Nous avons commencé les calculs précédens, dans la supposition de $\cos(\alpha' - \alpha) = 1$, parce que $\alpha' - \alpha$ est un petit angle; mais lorsqu'il ne sera pas fort petit, on devra répéter le calcul une seconde fois, si l'on desire une grande exactitude. Au reste, comme les calculs de chaque phase se font pour des heures successives, si l'on commence par l'heure où α' diffère très-peu de α, on prendra pour chacune des autres la valeur de $\alpha' - \alpha$ trouvée pour l'heure précédente.

Digitized by Google

140. Il est très-aisé de trouver l'heure pour laquelle $\alpha = \alpha$, parce qu'on a dans ce cas $\frac{\delta}{h} = \frac{\delta - \gamma' q \sin H}{h - \gamma' g \cos H}$, (n° 122), d'où l'on tire

$$\text{tang } H = \frac{\delta g}{hq} = \frac{\text{tang } \alpha}{\sin D},$$

valeur constante pour tous les cas de la même éclipse.

141. Pareillement, si l'on veut déterminer l'heure où $\alpha' - \alpha$ devient un *maximum :* en différentiant l'équation

$$\text{tang } \alpha' (h - \gamma' g \cos H) = \delta - \gamma' q \sin H,$$

et supposant $\frac{d\alpha'}{dH} = 0$, on aura

$$\text{tang } H = -\frac{q}{g \text{ tang } \alpha'} = -\frac{\sin D}{\text{tang } \alpha'} = \frac{-h \sin D + \gamma' g \cos H \sin D}{\delta - \gamma' q \sin H},$$

d'où l'on tire

$$\delta \text{ tang } H + h \sin D = \gamma' q \left(\frac{\sin^2 H}{\cos H} + \cos H \right) = \frac{\gamma' q}{\cos H},$$

et $$\delta \sin H + h \sin D \cos H = \gamma' q,$$

ou $$\text{tang } \alpha \sin H + \sin D \cos H = \frac{\gamma' q}{h}.$$

Cette équation, en y mettant d'abord H' au lieu de H, et ensuite tang H au lieu de $\frac{\text{tang } \alpha}{\sin D}$, se réduit à

$$\sin D (\sin H' \text{ tang } H + \cos H') = \frac{\gamma' q}{h} = \frac{\gamma' p \sin^2 D \cos P}{h} \text{ (n° 30)},$$

Donc, en faisant $\cos \lambda = \frac{\gamma' p \cos P \cos H}{h}$, on aura

$$\cos (H' - H) = \cos \lambda, \quad \text{et} \quad H' = H \pm \lambda.$$

142. Ainsi, puisque dans le cas où $\alpha' = \alpha$ la direction de l'orbite apparente coïncide avec celle de l'orbite relative, il est évident qu'on manque de précision en disant simplement que la

plus grande phase a lieu lorsque la ligne des centres est perpendiculaire à l'orbite relative, cela n'étant exact que dans le seul instant où tang H sera égal à $\frac{\text{tang } z}{\sin D}$. Dans tous les autres on commet une erreur, qui sera d'autant plus grande que l'angle horaire H' approchera davantage de $H \pm \lambda$. Cette erreur cependant sur laquelle M. Du Séjour insiste fortement et si souvent, ne roule que sur le nom de *maximum*, attribué à cette phase, qui, à la vérité, n'en diffère que très-peu, étant la seule qui correspond exactement au temps et au lieu déterminés par le calcul.

143. Nous avons vu, par les exemples précédens, combien sont petites les corrections que l'on trouve en commençant les calculs avec la valeur moyenne de p : et par-là, il est bien facile d'entendre que pour l'annonce des phénomènes, ou pour en dresser des cartes, surtout en petit, comme c'est l'usage, on pourra non-seulement supposer $\alpha' = \alpha$, mais négliger aussi l'ellipticité de la Terre, en se bornant aux premiers résultats donnés par la valeur moyenne de p, et regarder P comme la latitude du lieu. On verra que le temps nécessaire pour pratiquer tous ces calculs sera abrégé de plus de moitié.

N. B. Nous avons toujours calculé les quantités δ', n', h, n, qui dépendent des mouvemens horaires en ascension droite et en déclinaison (n° 16), de la manière convenable à la disposition particulière de ces élémens dans les Ephémérides de Coimbre. Dans ces Ephémérides, tous les mouvemens de la Lune sont calculés de 12 en 12 heures, et chacun des nombres qui les représentent est accompagné de deux autres nombres subsidiaires A et B, qui servent à calculer ces mouvemens pour les temps intermédiaires, ensorte que désignant, par exemple, l^o la déclinaison de la Lune donnée par les Ephémérides pour le temps o, on y suppose que cette déclinaison pour un temps postérieur t, moindre de 12^h, est représentée par l'équation $l^{o+t} = l^o + At + Bt^2 \ldots (a)$, et par conséquent le mouvement horaire en déclinaison depuis le temps $o + t$ est égal à $A + 2Bt \ldots . (b)$

Mais comme les nombres A et B n'ont pas d'équivalens dans les autres Ephémérides, il convient d'indiquer ici la manière de

les obtenir par les Tables de la *Connaissance des Temps* ou par celles du *Nautical Almanach*.

Désignons pareillement par l^{o+12}, l^{o-12} les déclinaisons de la Lune, qui, dans ces Tables, correspondent aux temps $0+12^h$, $0-12^h$, on aura (*a*) les deux équations

$$l^{o+12} = l^o + 12\,A + 12^2 B,$$
$$l^{o-12} = l^o - 12\,A + 12^2 B,$$

dont la somme et la différence donnent

$$A = \frac{l^{o+12} - l^{o-12}}{24}, \quad B = \frac{l^{o+12} + l^{o-12} - 2l^o}{288}.$$

C'est la même chose pour les ascensions droites, les longitudes, et les latitudes, selon que *l* signifie l'une ou l'autre de ces quantités.

Exemple. Dans la *Connaissance des Temps*, on a pour le 15 mars 1807 (24 ventose an 15, page 71),

	Asc. dr. ☾	Déclin. ☾
à midi	60° 8′	21° 35′
12^h avant	53 24	20 44
12^h après	67 00	22 10.

Si, d'après ces données, on calcule les valeurs de *A* et de *B*, et le mouvement horaire qui aura lieu, par exemple, à 5 heures du soir du même jour (*b*), on aura, suivant la *Connaissance d'Temps*,

	A	*B*	Mouv. hor. à 5^h du soir.
Asc. dr. ☾	34′,000	0′,0278	34′,278
Déclin. ☾	3,583	— 0,0555	3,028.

Dans les Ephémérides de Coimbre, on trouve

Asc. dr. ☾	34′,073	0′,0283	34′,311
Déclin. ☾	3,544	— 0,0583	3,045.

Digitized by Google

Les petites différences proviennent surtout, de ce que les données de la *Connaissance des Temps* ne vont que jusqu'à la minute.

§ VIII.

Des passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

144. Ces phénomènes aussi rares qu'importans, ne sont autre chose que des éclipses de Soleil, quoiqu'ils ne paraissent pas sensiblement en être, à cause du peu de lumière que perd cet astre par l'interposition optique de ces planètes, qui ne paraissent sur le Soleil que comme des taches noires et rondes, qui en traversent le disque. Et puisqu'ils présentent ainsi le même aspect que la Lune dans les éclipses ordinaires, on pourra leur appliquer les mêmes formules avec les modifications et les réductions qui conviennent à ce cas particulier.

145. En conservant donc toutes les définitions du problème fondamental (n° 16), et changeant seulement le nom d'*astre* en celui de *Soleil*, et le nom *Lune* en *Vénus* ou *Mercure*, la solution que nous y avons donnée s'appliquera évidemment au cas présent; en observant pourtant que nous trouverons h toujours négatif, parce que le mouvement de ces planètes dans la conjonction inférieure est rétrograde. Mais en raison de leurs distances, de la petitesse de leurs parallaxes, et de la presque-uniformité de leurs mouvemens, on pourra négliger, non-seulement les petits termes dépendans de n, n', d', p', mais encore, l'ellipticité de la Terre, et prendre P pour la latitude du lieu, sans aucune réduction, pas même celle des parallaxes.

146. Pareillement, dans tous les calculs de ces phénomènes, on pourra prendre $S = \Sigma$, parce que la réduction $\Sigma \sin p \cos \pi$ (où p n'est plus la différence des parallaxes, mais bien la parallaxe seule de la planète (n° 22)) ne va pas à $0'',16$, même dans les circonstances les plus rares. Cette correction cependant n'est pas à négliger lorsqu'il s'agit de passer des observations à la recherche

Digitized by Google

des élémens. L'un de ces élémens est la parallaxe du Soleil, que l'on ne peut déterminer avec précision que par ces éclipses et surtout par celles de Vénus, qui sont les plus rares.

147. *Etant donné le temps de la conjonction en ascension droite, trouver celui de la plus courte distance des centres, et les temps de l'entrée et de la sortie, par rapport au centre de la Terre.*

Soit T le temps de la conjonction, et T' celui de la plus courte distance (qui est dans ce cas le milieu du passage), Δ la différence des déclinaisons au moment de la conjonction, Σ la somme des demi-diamètres, $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, et $\cos\varphi = \frac{\Delta\cos\alpha}{\Sigma}$; on aura

$$T' = T - \frac{\Delta\sin\alpha\cos\alpha}{h},$$

$$\text{temps de} \begin{Bmatrix}\text{l'entrée}\\ \text{la sortie}\end{Bmatrix} = T' \mp \frac{\Sigma\sin\varphi\cos\alpha}{h},$$

$$\text{durée totale} = \frac{2\Sigma\sin\varphi\cos\alpha}{h},$$

L'angle α est toujours obtus et garde toujours le même signe de δ; φ doit être obtus, suivant la définition, parce que $\cos\alpha$ est négatif, mais comme il n'entre dans les formules d'autre fonction de φ que le sinus, on peut le prendre aigu.

148. *Démonstration.* D'après l'hypothèse, la conjonction apparente coïncide avec la conjonction vraie, et l'on a $p = 0$. D'où il suit que les quantités T', Δ', α', h' de la formule du n° 36 se réduisent à T, Δ, α, h, et par conséquent la même formule se réduit à $T' = T - \frac{\Delta\sin\alpha\cos\alpha}{h}$.

Quant à l'équation $\cos\varphi = \frac{\Delta\cos\alpha}{\Sigma}$, comme $\Delta\cos\alpha$ désigne la plus courte distance des centres, et que Σ est la distance des centres lors du contact extérieur, φ sera donc l'angle compris par ces deux lignes, et par conséquent $\Sigma\sin\varphi$ représentera la moitié de l'espace parcouru par la planète pendant l'éclipse; et comme $\frac{h}{\cos\alpha}$ est la vîtesse dans la direction de l'orbite (n° 38), le temps de la demi-durée de l'éclipse sera donc $= \frac{\Sigma\sin\varphi\cos\alpha}{h}$.

149. *Exemple.* Nous allons prendre pour exemple le passage de Vénus, du 3 juin 1769, calculé aussi par M. Du Séjour. En empruntant de cet Auteur les mêmes élémens, nous trouvons la conjonction en ascension droite, à Paris, à $9^h\ 55'\ 14''$, $D = 22°\ 26'\ 30''$, $\Delta = 10',6685$, $\delta' = -1',0769$, $h = -3',8628$, demi-diamètre du Soleil $s = 15',7867$, demi-diamètre de Vénus $\sigma = 0',4767$, parallaxe du Soleil $= 0',14367$, parallaxe de Vénus $= 0',50417$, et $p = 0',3605$. Nous supposerons encore, d'après le même Auteur, la distance de Vénus au Soleil dans la conjonction $\rho = 0,72619$, et la distance de la Terre au Soleil $r = 1,01515$ (en supposant la moyenne $= 1$).

Cela étant, nous aurons $\alpha = -164°\ 26'\ 20''$, le temps $\frac{\Delta \sin \alpha \cos \alpha}{h} = -0^h,71441 = -42'\ 52''$, et partant, $T' = 10^h\ 38'\ 6''$; $\Sigma = 16',2634$, $\varphi = 50°\ 52'\ 20''$, donc la durée de l'éclipse sera de $6^h\ 17'\ 32''$, l'entrée à $7^h\ 29'\ 20''$ du soir, et la sortie à $1^h\ 46'\ 52''$ du matin du 4, et sous l'horizon. Et comme tout cela a lieu dans le même instant physique, on en réduira facilement le temps à celui que l'on compte dans tout autre lieu dont la longitude, par rapport à celle de Paris, sera connue. Réciproquement, ayant sous les yeux une Table des arcs demi-diurnes, on trouvera pour chaque parallèle les longitudes des lieux entre lesquels on peut voir ou tout le passage, ou seulement l'entrée, ou la sortie seule, ou ni l'une ni l'autre; sauf la petite erreur due à l'effet des parallaxes, que l'on pourra toujours calculer dès qu'on jugera cette correction nécessaire.

150. *Déterminer le point du disque solaire qui doit être le premier entamé par la planète.*

Soit

La hauteur du pôle..... $= P$
La déclinaison du Soleil..... $= D$
L'angle horaire au moment de l'entrée..... $= H$
Le temps de l'entrée moins celui de la conjonct.... $= t$
La somme des demi-diamètres..... $= \Sigma$;

et en faisant $\cos \Phi = \frac{\Delta + \delta' t}{\Sigma}$ et $\text{tang}\, \mu = \frac{\sin H}{\text{tang}\, P \cos D - \sin D \cos H}$,

l'angle $\mu - \Phi$ déterminera le point cherché, en observant de le compter du point le plus haut du Soleil vers l'occident quand il est positif, et vers l'orient s'il est négatif. L'angle Φ est aigu ou obtus selon la règle des signes, et de lui-même positif dans le cas dont il s'agit.

151. C'est la même règle qu'on a démontrée (n° 49) avec la seule différence que l'entrée de la planète correspond à la sortie de la Lune; c'est pour cela que Φ prend ici le signe qui, dans le n° 49, correspond à la sortie de la Lune. L'angle μ est évidemment le même qu'on y a calculé au moyen des nombres n et m; et comme ces nombres ont le facteur commun p que, dans le cas présent, on suppose $= 0$, en divisant l'un et l'autre par p, on a la formule dont nous nous servons ici. Il est d'ailleurs facile de voir, que cet angle μ est celui que forment au centre du Soleil le cercle vertical et celui de déclinaison, et que Φ est l'angle formé par la ligne des centres avec le même cercle de déclinaison.

A Paris, par exemple, nous aurions

$$P = 48^\circ\,50', \quad H = 112^\circ\,22'\,30'' \quad t = -2^h,432;$$
$$\Sigma = 16',263, \quad \mu = 37^\circ\,34', \quad \Phi = 35^\circ\,12', \quad \Delta + \delta t = 13',288;$$

et nous en conclurions que l'entrée devrait se faire par 2° 22′ du point le plus haut du Soleil vers l'occident, c'est-à-dire, vers la droite.

152. *Déterminer l'effet des parallaxes sur la durée du passage dans un lieu quelconque.*

Soit l'angle horaire correspondant à l'instant de la conjonction $= H$, la somme des demi-diamètres $= \Sigma$: en supposant les autres définitions précédentes, calculons d'abord les quantités m, n, et faisant ensuite

$$\delta' = \delta - \gamma' p \cos P \sin D \sin H,$$
$$h' = h - \gamma' p \cos P \cos H,$$
$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\delta'}{h'},$$
$$\cos \phi' = \frac{(\Delta - m)\cos \alpha' + n \sin \alpha'}{\Sigma},$$

nous aurons

$$\text{demi-durée du passage} = \frac{\Sigma \sin \varphi' \cos \alpha'}{h'}.$$

153. *Démonstr.* Dans le cas présent, l'équation $h\tau = g\sin(H+\gamma\tau)$ (n° 32), vu que τ est fort petit, devient $h = g(\sin H + \gamma'\tau \cos H)$ (n° 26), et partant $\tau = \frac{g \sin H}{h - \gamma' g \cos H}$; on a de même

$$q\cos(H+\gamma\tau) = q\cos H - q\gamma'\tau \sin H,$$

et en y substituant la valeur de τ, on aura

$$q\cos(H+\gamma\tau) = q\cos H - \frac{\gamma' g q \sin^2 H}{h - \gamma' g \cos H}.$$

En substituant maintenant cette dernière valeur, ainsi que celle de τ, dans l'équation $\Delta' = \Delta + \delta\tau - [\zeta - q\cos(H+\gamma\tau)]$, après les réductions convenables, on aura

$$\Delta' = \Delta + \frac{g \sin H(\delta - \gamma' q \sin H)}{h - \gamma' g \cos H} - (\zeta - q\cos H),$$

c'est-à-dire,

$$\Delta' = \Delta + n \operatorname{tang} \alpha' - m.$$

En supposant donc, que la valeur de α' correspondante à H diffère très-peu de celle qui correspondrait à $H+\gamma\tau$, nous aurons l'angle φ' (n° 44) par l'équation

$$\cos \varphi' = \frac{(\Delta - m)\cos \alpha' + n \sin \alpha'}{\Sigma};$$

et par la différence des deux valeurs de t, on trouvera

$$\text{la demi-durée du passage} = \frac{\Sigma \sin \varphi' \cos \alpha'}{h'}.$$

Pour déterminer le commencement et la fin, il suffit de calculer la valeur de τ, et l'on aura le temps de la conjonction apparente, auquel on appliquera les deux valeurs de t, comme dans le n° 44.

154. *Exemple.* On demande la demi-durée du même passage,

dans le lieu qui, étant situé sous le parallèle austral de 10°, en aura vu le milieu à midi.

La conjonction étant donc arrivée à $11^h\ 17'\ 8''$ du matin (n° 149), on aura $H = -10°\ 43'$, et par conséquent on trouvera $m = -0',1910$, $n = -0',0665$, $\delta' = -1',0703$, $h' = -3',9541$, $\alpha' = -164°\ 51'\ 20''$, $\varphi' = 49°\ 57'$, et la demi-durée $= 3^h\ 2'\ 21''$. M. Du Séjour a trouvé (page 202) $3^h\ 3'\ 3''$.

Quant à la longitude du lieu, comme on y observait à midi le milieu du passage, lorsqu'on comptait à Paris $10^h\ 38'\ 6''$ du soir, il est évident que cette longitude est de $10^h\ 38'\ 6''$ à l'occident de Paris. Ainsi l'on ne voit pas pourquoi M. Du Séjour a fait dépendre inutilement cette détermination du calcul de plusieurs formules au moyen desquelles il trouve enfin $10^h\ 37'\ 51''$: et cela, dans un problème dont il suppose que le calcul doit être répété plusieurs fois de suite, afin d'en dresser des Tables pour les différentes heures du milieu du passage, et dont il indique même la forme (page 204).

155. *Déterminer le lieu qui, le premier, observera l'entrée de la planète au coucher du Soleil, et le dernier qui en verra la sortie au lever de cet astre; et réciproquement, le premier lieu qui observera l'entrée au lever du Soleil, et le dernier qui verra la sortie au coucher du même astre.*

Le premier cas est identiquement le même que celui du n° 87, en y changeant les mots de *lever* en *coucher*, et de *coucher* en *lever*, vu qu'ici le mouvement est rétrograde. Pour le second, on changera $p + \Sigma$ en $p - \Sigma$, comme on aurait dû le faire dans le problème cité, si l'on y eût demandé les lieux qui verraient le commencement et la fin de l'éclipse annulaire à l'horizon. Au reste, comme dans les deux cas α est toujours obtus, on prendra aussi λ obtus; $\lambda - \alpha$ appartiendra toujours au lever du Soleil, et $\lambda + \alpha$ à son coucher.

156. *Exemple.* Ayant ainsi, dans le passage du 3 juin, (n° 149) $D = 22°\ 26'\ 30''$, $\Delta = 10',6685$, $\alpha = -164°\ 25'\ 20''$, $\Sigma = 16',2634$, $p + \Sigma = 16',624$; on trouvera pour le premier cas, $\lambda = -141°\ 49'$. On aura donc, pour la sortie au lever du Soleil,

$\lambda - \alpha = 22°\ 36'\ 20''$, $P = 20°\ 48'\ 40''$, $H = -99°\ 1'\ 50''$, $T = 5^h\ 23'\ 53''$, $t = 3^h\ 58'\ 23''$, la conjonct. à $1^h\ 25'\ 30''$ du matin, et la longitude du lieu $3^h\ 30'\ 16''$ à l'orient de Paris.

Digitized by Google

On trouve pareillement, pour l'instant de l'entrée au coucher du Soleil,

$\lambda + \alpha = -306^\circ\,14'\,20'' = +53^\circ\,45'\,40''$, $P = 48^\circ\,12'$, $H = 117^\circ\,30'\,50''$, $T = 7^h\,50'\,3''$, $t = -2^h\,32'\,39''$, la conjonct. à $10^h\,22'\,42''$ du soir, et la longitude du lieu $0^h\,27'\,28''$ à l'orient de Paris.

157. Dans le second cas, avec la valeur $p - \Sigma = -15'{,}903$, nous trouvons d'abord $\lambda = 139^\circ\,44'\,40''$, d'où l'on tire, pour l'entrée de la planète au lever du Soleil,

$\lambda - \alpha = 304^\circ\,10' = -55^\circ\,50'$, $P = -49^\circ\,53'$, $H = -60^\circ\,38'\,50''$, $T = 7^h\,57'\,25''$, $t = -2^h\,18'\,44''$, la conjonct. à $10^h\,16'\,9''$, et la longitude du lieu $11^h\,39'\,5''$ à l'occident de Paris ;

et pour la sortie, au coucher du Soleil, on aura

$\lambda + \alpha = -24^\circ\,40'\,40''$, $P = -22^\circ\,41'\,40''$, $H = 80^\circ\,3'\,10''$, $T = 5^h\,20'\,13''$, $t = 3^h\,44'\,28''$, la conjonct. à $1^h\,35'\,45''$ du soir, et par conséquent la longitude du lieu $8^h\,19'\,29''$ à l'occident de Paris.

158. Ce second cas donne des points presque diamétralement opposés à ceux du premier ; et la différence, ainsi que celle des durées du passage (qui, par le méridien inférieur, est de $6^h\,31'\,2''$, et par le supérieur, de $6^h\,3'\,12''$) vient de l'effet des parallaxes, lesquelles, dans un cas rapprochent du centre la corde ou le chemin que parcourt la planète dans son orbite relative pendant la durée du passage, et l'en écartent dans l'autre. Si l'on faisait $p = 0$, nous aurions des points exactement antipodes, et les durées égales entre elles, et à celle qu'on aurait en faisant le calcul pour le centre de la Terre.

159. *On demande les points du Globe qui seront les plus avantageux pour l'observation de ces phénomènes.*

Nous remarquerons d'abord que ces points étant ceux où l'effet des parallaxes sera le plus grand, c'est-à-dire, où la durée du passage sera un *maximum* ou un *minimum* ; on pourrait les déterminer à la manière ordinaire, en différentiant la formule $\frac{\Sigma \sin\phi' \cos\alpha'}{h'}$

par rapport à *P* et *H*. Mais outre que ce moyen nous mènerait à des calculs trop compliqués, le résultat n'en serait pas moins équivoque et indéterminé quant à la latitude, parce que ce *maximum* ou *minimum* de durée peut avoir lieu sous une infinité de parallèles compris entre certaines limites, sinon rigoureusement, du moins aussi approché qu'on peut le souhaiter dans la pratique. Ainsi nous prendrons dans le problème précédent tout ce qui est nécessaire pour résoudre cette question.

160. Comme la durée du passage par le méridien inférieur, est ici de $6^h\,31'\,2''$ (n° 158), elle sera en même temps la plus grande qu'on pourrait observer sous un ou plusieurs points compris entre le parallèle boréal de 20° 49′ et celui de 48° 12′, si l'épaisseur de la Terre le permettait. Il faut donc dépasser vers le Nord le dernier parallèle, jusqu'à celui où l'on verrait l'entrée au coucher et la sortie au lever du Soleil, le milieu du passage étant à minuit. On trouvera que ce parallèle est, dans notre exemple, celui de 57° 55′ 40″, et la longitude du lieu $1^h\,21'\,54''$ à l'orient de Paris, point sous lequel on observerait la demi-durée du passage de $3^h\,14'\,56''$, ce qui ne diffère du *maximum* que de 35″. Le méridien déterminé dans ce cas particulier nous montre aussi que de tous ses points compris entre les parallèles susdits, on observerait ce même *maximum* de durée, ou rigoureusement, ou sans différence sensible.

161. Par un raisonnement semblable, nous conclurons que sous le méridien opposé de $10^h\,38'\,6''$ à l'occident de Paris, où le milieu du passage est à midi, on observerait la plus courte durée de $6^h\,3'\,12''$, depuis le parallèle austral de 22° 42′ jusqu'à celui de 49° 52′, laquelle croît peu à peu de part et d'autre en dehors de ces limites; car sous l'équateur, par exemple, on trouverait la demi-durée de $3^h\,2'\,57''$, et sous le parallèle austral de 59° 35′ 10″ (où l'entrée a lieu au lever du Soleil et la sortie à son coucher) on trouverait la demi-durée de $3^h\,2'\,15''$, avec 39″ seulement d'excès sur la plus courte durée. D'après cela, on voit que pour les observations du passage du 3 juin 1769, on a manqué les deux points les plus importans de la mer Pacifique, à l'archipel de Taïti, savoir, l'île Hervey, située sous 19° 17′ de latitude australe, et $10^h\,44'\,32''$ à

Digitized by Google

l'occident de Paris, et l'île Mangée, sous 21° 56′ 45″ de latitude et 10ʰ 41′ 32″ de longitude.

162. *Étant donné le temps écoulé entre les contacts extérieur et intérieur d'entrée, ou de sortie, déterminer le demi-diamètre de la planète.*

Soit s le demi-diamètre du Soleil, σ celui de la planète, τ la demi-durée entre les deux contacts, en supposant de plus, les définitions précédentes, calculons pour le temps de l'entrée ou de la sortie du centre, ou même pour la moitié de l'intervalle entre les contacts l'angle α', par l'équation $\tang \alpha' = \frac{\delta'}{h'}$,

en supposnt

$$\delta' = \delta - \gamma' q \sin H,\ h' = h - \gamma' g \cos H.$$

Faisons ensuite

$$\sin \varphi = \frac{\Delta \cos \alpha}{s},$$

et nous aurons

$$\sigma = \frac{h' \tau \cos [\varphi \pm (\alpha' - \alpha)]}{\cos \alpha'}.$$

L'angle φ est supposé toujours aigu, et comme d'ailleurs $\cos \alpha$ est toujours négatif, φ sera donc, négatif dans le cas où Δ sera boréal, et positif lorsque Δ sera austral. Dans l'expression de σ, le signe $+$ sert pour les contacts à l'entrée de la planète, et le signe $-$ pour ceux de la sortie.

163. *Démonstration.* On voit d'abord que φ est l'angle formé à la circonférence du disque du Soleil par le diamètre de cet astre et l'orbite relative de la planète, et au moyen d'une figure, on verra aisément que $\varphi + (\alpha' - \alpha)$ est l'angle formé par ces deux lignes à l'entrée de la planète, et $\varphi - (\alpha' - \alpha)$ à sa sortie. Mais pour que le centre de la planète s'approche de celui du Soleil, de la quantité σ, il faut qu'il parcoure dans son orbite apparente l'espace $\frac{\sigma}{\cos [\varphi \pm (\alpha' - \alpha)]}$ avec une vîtesse apparente $= \frac{h'}{\cos \alpha'}$, on aura donc

$$\frac{h' \tau}{\cos \alpha'} = \frac{\sigma}{\cos [\varphi \pm (\alpha' - \alpha)]},$$

et par conséquent

$$\sigma = \frac{h' \tau \cos [\varphi \pm (\alpha' - \alpha)]}{\cos \alpha'}.$$

Digitized by Google

164. *Exemple.* Nous avons, dans le même passage, $\Delta = 10',6685$, $\alpha = -164^\circ\ 25'\ 20''$, et $s = 15',79$, partant $\varphi = -40^\circ\ 36'\ 20''$, quantités constantes pour toutes les observations de ce passage, et pour tous les lieux. Dans l'observation de la Californie (à jamais mémorable par la mort du célèbre abbé Chappe, qui l'a faite), par $23^\circ\ 3'\ 42''$ de latitude boréale, on a eu

pour l'entrée,		pour la sortie,	
$H =$	$2^\circ\ 5'\ 30''$	$H =$	$91^\circ\ 1'\ 15''$
$\delta' =$	$1',0781$	$\delta' =$	$-\ 1',100$
$h' =$	$-\ 3',9496$	$h' =$	$-\ 3',8613$
$\alpha' =$	$-\ 164^\circ\ 44'$	$\alpha' =$	$-\ 163^\circ\ 57'\ 40''$
$\varphi + (\alpha' - \alpha) =$	$-\ 40^\circ\ 55'$	$\varphi - (\alpha' - \alpha) =$	$-\ 41^\circ\ 4'$
$\tau =$	$0^h,15139$	$\tau =$	$0^h,15417$
$\sigma =$	$0',46835$	$\sigma =$	$0',467$
$=$	$28'',101$	$=$	$28'',02$,

et par conséquent le résultat moyen de cette observation est $\sigma = 28'',06$. L'observation de Taïti donne $\sigma = 27'',94$; le milieu des deux donne $\sigma = 28'',00$, résultat beaucoup plus exact qu'on ne pourrait l'obtenir par une mesure immédiate.

165. *Étant donnée, pour l'instant de la conjonction, la parallaxe du Soleil, ou celle de la planète, ou leur différence, on demande deux quelconques de ces quantités.*

Soit π la parallaxe du Soleil, p' celle de la planète, et $p = p' - \pi$; la distance de la Terre au Soleil $= r$, celle de la planète au Soleil $= \rho$, et par conséquent la distance de la Terre à la planète $= r - \rho$: la grandeur relative de ces distances est donnée par les Tables avec la plus grande exactitude. Or, comme les parallaxes sont en raison inverse des distances, on aura

$$p' : \pi :: r : r - \rho, \quad \text{et} \quad p' - \pi : \pi :: \rho : r - \rho.$$

Digitized by Google

D'où l'on tire les équations

$$\pi = \frac{p(r-\rho)}{r} = \frac{p'(r-\rho)}{r},$$

$$p = \frac{\pi\rho}{r-\rho} = \frac{p'\rho}{r},$$

$$p' = \frac{\pi r}{r-\rho} = \frac{pr}{\rho}.$$

166. *Étant donnée l'observation complète d'un passage, on demande le temps de la conjonction, la différence des déclinaisons, celle des parallaxes, et le demi-diamètre du Soleil.*

Ce cas est précisément le même que celui du problème n° 81 pour ce qui regarde dT°, $d\Delta$, dp. Il n'en diffère qu'à l'égard du quatrième élément, c'est-à-dire, qu'au lieu de l'ellipticité de la Terre, qui n'est ici d'aucune influence, on demande le demi-diamètre s du Soleil, ou plutôt la correction ds de ce demi-diamètre. Comme la distance apparente des centres dans le contact extérieur est $S = s + \sigma$, et dans le contact intérieur $= s - \sigma$, la valeur exacte de σ étant déjà déterminée (n° 162), il est évident que les distances apparentes que l'on suppose observées, renferment en elles-mêmes l'erreur de la valeur hypothétique de s, soit qu'on prenne cette quantité dans les Tables, ou qu'on la mesure immédiatement; et comme cette erreur influe sur la détermination des autres élémens, il faudra en trouver la valeur conjointement avec celle de ceux-ci. D'ailleurs, puisque cette erreur ne dépend point de M, ni de N, l'application de la méthode du n° 81 devient par-là beaucoup plus facile, car il est évident que par cette raison chacun des coefficiens C, C', C'', C''' (n° 82) se réduit à l'unité.

167. Ainsi, calculant d'abord avec les élémens hypothétiques les distances réduites Σ, Σ', etc. pour les temps des contacts T, T', etc., réduisant en même temps les distances observées S, S', etc. par les formules $\Sigma = S - S \sin p' \cos \pi$ (n° 145), etc. et faisant ensuite

Digitized by Google

$$\Sigma\,(\text{obs.}) - \Sigma\,(\text{calc.}) = d\Sigma \qquad A = \frac{h\sin(\varphi + \alpha)}{\cos\alpha}$$
$$\Sigma'\,(\text{obs.}) - \Sigma'\,(\text{calc.}) = d\Sigma' \qquad A' = \frac{h\sin(\varphi' + \alpha)}{\cos\alpha}$$
$$\Sigma''\,(\text{obs.}) - \Sigma''\,(\text{calc.}) = d\Sigma'' \qquad A'' = \frac{h\sin(\varphi'' + \alpha)}{\cos\alpha}$$
$$\Sigma'''\,(\text{obs.}) - \Sigma'''\,(\text{calc.}) = d\Sigma''' \qquad A''' = \frac{h\sin(\varphi''' + \alpha)}{\cos\alpha}$$
$$B = \sin\pi\cos(\mu - \varphi) \qquad F = A\cos\varphi' - A'\cos\varphi \qquad E = \cos\varphi' - \cos\varphi$$
$$B' = \sin\pi'\cos(\mu' - \varphi') \qquad F' = A'\cos\varphi'' - A''\cos\varphi' \qquad E' = \cos\varphi'' - \cos\varphi'$$
$$B'' = \sin\pi''\cos(\mu'' - \varphi'') \qquad F'' = A''\cos\varphi''' - A'''\cos\varphi'' \qquad E'' = \cos\varphi''' - \cos\varphi''$$
$$B''' = \sin\pi'''\cos(\mu''' - \varphi''') \qquad G = B\cos\varphi' - B'\cos\varphi \qquad K = FG' - F'G$$
$$G' = B'\cos\varphi'' - B''\cos\varphi' \qquad K' = F'G'' - F''G'$$
$$G'' = B''\cos\varphi''' - B'''\cos\varphi'' \qquad L = FE' - F'E$$
$$f = d\Sigma'\cos\varphi - d\Sigma\cos\varphi' \qquad L' = F'E'' - F''E'$$
$$f' = d\Sigma''\cos\varphi' - d\Sigma'\cos\varphi'' \qquad k = Ff' - F'f$$
$$f'' = d\Sigma'''\cos\varphi'' - d\Sigma''\cos\varphi''' \qquad k' = F'f'' - F''f'$$
$$R = KL' - K'L \qquad r = Kk' - K'k,$$

on aura

$$ds = \frac{r}{R}, \quad dp = \frac{k - Lds}{K}, \quad dT^{\circ} = \frac{f - Gdp - Eds}{F},$$

$$d\Delta = \frac{d\Sigma + AdT^{\circ} + Bdp + ds}{\cos\varphi}.$$

168. *Exemple.* Afin d'appliquer ces formules à l'observation de la Californie, nous avons cru devoir vérifier d'avance par les Tables les valeurs de δ' et de h, de l'exactitude desquelles dépend tout; et nous trouvons $\delta' = -1',07221$, $h = -3',85169$, et par conséquent $\alpha = -164^{\circ}\,26'\,40''$. En supposant donc la conjonction à $2^{h}\,27'\,4''$, $\Delta = 10',6685$, $s = 15',7867$, $\sigma = 0',4665$, $p' = 30'',25$, $p = 0',3605$; ayant de plus $\zeta = 0',130518$, $\log g = 9,520734$, et $\log q = 9,102505$: le reste du calcul donnera les résultats suivans, en observant que les lettres de la première colonne marquées d'un, de deux ou de trois traits sont censées correspondre successivement aux nombres des trois autres colonnes écrits vis-à-vis de ces lettres.

$T = 11^h\ 59'\ 17''$	$0^h\ 17'\ 27''$	$5^h\ 54'\ 50''$	$6^h\ 13'\ 20''$
$S = 16',2532$	$15',3202$	$15',3202$	$16',2532$
$H = -\ 0°\ 10'\ 45''$	$4°\ 21'\ 45''$	$88°\ 42'\ 30''$	$93°\ 20'\ 0''$
$n = -\ 0',0010372$	$0',025231$	$0',33161$	$0',33113$
$m = 0',0038398$	$0',004264$	$0',12767$	$0',13788$
$\mu = -\ 14°\ 53'\ 40''$	$80°\ 23'\ 40''$	$68°\ 56'\ 40''$	$67°\ 23'\ 40''$
$\sin\pi = 8.048966$	8.851154	9.993726	9.997811,
réd. $= -\ 0',0024$	$-\ 0',0022$	$-\ 0',0004$	$-\ 0',0002$
$\Sigma = 16',2508$	$15',3180$	$15',3198$	$16',2530$
$t = -\ 2^h,46305$	$-\ 2^h,16028$	$3^h,46278$	$3^h,77111$
$\log N = 0.977172$	0.918842	$-\ 1.135740$	$-\ 1.171908$
$\log M = 1.124031$	1.113291	0.834295	0.812059
$\varphi = 35°\ 29'\ 30''$	$32°\ 34'\ 54''$	$-\ 63°\ 27'\ 25''$	$-\ 66°\ 24'\ 40''$
$\cos\varphi = 9.910731$	9.925634	9.650181	9.602246
$\Sigma = 16',3418$	$15',4049$	$15',2797$	$16',2111$
$d\Sigma = -\ 0',0910$	$-\ 0',0869$	$0',0401$	$0',0419$

Logarithmes.

$A = -\ 0.492650$	$B = 7.853522$	$F = -\ 9.291213$
$A' = -\ 0.473868$	$B' = 8.678238$	$F' = -\ 0.583236$
$A'' = 0.472258$	$B'' = -\ 9.822592$	$F'' = -\ 9.297760$
$A''' = 0.491472$	$B''' = -\ 9.838051$	$G = -\ 8.515853$
$E = 8.453685$	$f = 7.772666$	$G' = 9.764439$
$E' = -\ 9.597425$	$f' = 8.861069$	$G'' = 8.621187$
$E'' = -\ 8.669298$	$f'' = 7.427648$	$k = 7\ 929097$
$K = -\ 9.378944$	$L = 9.270108$	$k' = 7.619271$
$K' = -\ 8.650443$	$L' = 9.001353$	$R = -\ 8.195254$
		$r = -\ 6.790285$

$ds = +\ 0',0393$, $dp = -\ 0',0048$, $dT° = -\ 0^h,0244$, $d\Delta = +\ 0',0297$.

169. La première conséquence que l'on tire de cette observation mémorable, c'est que la diminution du demi-diamètre du Soleil due à l'*irradiation* n'a point lieu dans ces sortes d'éclipses, comme on l'a cru jusqu'ici; non-seulement parce qu'au lieu d'une diminution on trouve une petite augmentation, mais aussi parce que l'omission de cette correction est confirmée d'ailleurs par l'accord des autres élémens, comme nous le verrons tout-à-l'heure.

170. En second lieu, nous trouvons $p = 0',3557$, d'où l'on tire la parallaxe du Soleil $\pi = 8'',491$ (n° 165). M. du Séjour

Digitized by Google

(page 483), par des équations de condition établies sur un grand nombre d'observations, fait cette parallaxe de 8″,6811 pour le même passage du 3 juin 1769; et cela dans l'hypothèse d'une irradiation $d\sigma = -3'',5$, qu'il dit avoir découverte par l'éclipse du Soleil de 1764. Mais, en faisant $d\sigma = +2'',7$, afin de réduire le demi-diamètre du Soleil à ce que donne l'observation dont il s'agit ici, les mêmes calculs de l'Auteur donneraient $\pi = 8'',594$, valeur beaucoup plus approchée de celle que donne l'observation de 1764.

171. Les deux autres corrections dT^o et $d\Delta$, donnent la conjonction dans le lieu de l'observation, à $2^h\ 25'\ 36''$, et la différence des déclinaisons $\Delta = 10',6982$; et en réduisant à l'écliptique (n° 56), la conjonction en longitude y serait à $2^h\ 45'\ 32''$ (à $10^h\ 13'\ 42''$ à Paris), et la latitude de Vénus 10′ 25″,3. L'effet attribué à l'irradiation devient ici beaucoup plus sensible, parce que l'Auteur, en la supposant, trouve 10′ 13″,2; au lieu qu'en faisant $d\sigma = +2'',7$, il aurait trouvé 10′ 23″,1.

172. Mais ce qui montre décidément qu'on ne doit point retrancher l'irradiation du Soleil dans les éclipses de cet astre, c'est qu'en l'admettant, l'auteur trouve, pour le passage qui nous sert d'exemple, le demi-diamètre de Vénus de 28″,352. Mais en faisant $d\sigma = +2'',7$, il l'aurait trouvé de 28″,06, beaucoup plus conforme à ce qui résulte des observations (n° 164).

173. D'ailleurs, il est bien facile de concevoir qu'il y a une très-grande différence entre l'astre qui éclipse et celui qui est éclipsé. Vénus, lorsqu'elle est éclairée par le Soleil, a certainement une irradiation, dont cependant on ne diminue pas le demi-diamètre quand elle est éclipsée par la Lune. Or, lorsque Vénus vient à éclipser le Soleil, son irradiation disparaît tout-à-fait avec la lumière qui en était la cause, et elle ne peut éclipser alors que par l'interposition de son volume réel. Le Soleil, quand il ne serait tout entier que l'irradiation d'un petit foyer central, ne saurait être éclipsé par l'interposition d'un corps opaque, que de la même manière qu'il l'aurait été, si son disque lumineux posait tout entier sur la surface

Digitized by Google

d'un corps solide. Au reste, tout cela peut être encore démontré par l'expérience, dans une éclipse artificielle.

174. Il y a cependant une véritable cause, plus physique qu'optique, qui rend assez difficile l'observation des contacts, elle consiste dans la difficulté qu'éprouve la lumière à surmonter l'interposition d'un corps quelconque. Soit que l'attraction du corps, ou celle des parties de la lumière entre elles, empêche l'émission séparée d'un filet très-délié de lumière, il est certain qu'en de pareilles circonstances on en apperçoit une espèce d'accumulation qui, dès qu'elle a surmonté l'obstacle, fait paraître subitement au lieu du seul bord du Soleil un segment de largeur sensible, quelquefois plus grand, et d'autres fois plus petit; et l'on ne peut, à cause de cela, observer le contact qu'en estimant à peu près le point de concours des deux circonférences, en suivant de l'œil leurs prolongemens sur le ligament ou protubérance obscure qui se forme à cet endroit. Il est probable que les Astronomes à venir seront en cela plus heureux, si l'on parvient à construire des télescopes qui donnent une très-grande amplification, sans nuire à la distinction.

175. Il est bon de remarquer encore, que l'observation complète des quatre contacts n'ayant été faite nulle part, celles qu'on fera à l'avenir ne seront point inutiles. On pourra les combiner avec celles qui ont déjà été faites dans d'autres lieux, pourvu qu'on connaisse la différence de leurs méridiens. Pour cela, il n'y a qu'à assujétir à cette différence le temps hypothétique de la conjonction, afin qu'il corresponde au même instant physique, et que la correction dT° soit la même pour les deux lieux.

176. Remarquons enfin, qu'ayant plusieurs observations d'une même phase, qui ne diffèrent entre elles que de peu de secondes, il n'y a pas de doute qu'on en doive prendre un moyen arithmétique, à la manière ordinaire; mais si leurs différences sont considérables, le problème du n° 162 nous offrira le moyen de distinguer laquelle de ces observations mérite la préférence, ou si c'est le moyen arithmétique entre toutes qu'il faut employer. En effet, σ étant déjà connu par d'autres observations, si les observateurs s'accordent sur un contact, on calculera le temps jusqu'au contact voisin sur lequel ils diffèrent, par la formule $\frac{2\sigma\cos\alpha'}{h'\cos[\varphi\pm(\alpha'-\alpha)]}$; ce qui décidera la question.

Ainsi, dans l'observation du Fort du prince de Galles dans la baye d'Hudson, par exemple, Dymond et Walles s'accordent très-bien sur le contact intérieur de la sortie, que le premier a jugé à $7^h\ 0'\ 49''$, et le second à $7^h\ 0^o\ 47''$ (Du Séjour, pag. 473); d'où l'on peut surement conclure le moyen à $7^h\ 0'\ 48''$. Il n'en est pas de même pour le contact extérieur, que Dymond trouve à 7^h $19'\ 21''$, et Walles à $7^h\ 19'\ 2''$. En prenant donc $\sigma = 0',468$ comme on le trouve aussi pour l'entrée de la même observation; nous aurons, pour la sortie estimée du centre, $H = 107^o\ 29'\ 15''$, $h' = 3',8481$, $\alpha' = -164^o\ 7'\ 10''$, $\varphi - (\alpha' - \alpha) = -40^o\ 54'\ 30''$, et le temps cherché $18'\ 35''$, lequel, en y ajoutant celui du contact intérieur $7^h\ 0'\ 48''$, donne le temps du contact extérieur à $7^h\ 19'\ 23''$; et par conséquent, l'observation de Dymon est la seule qu'il faudra admettre.

Digitized by Google

TABLE

Des Réductions de la parallaxe de la Lune et de la latitude des lieux.

Latitude.	Réduction de la latitude —		Réduction de la parallaxe — Parallaxe équatoriale. 53′	57′	61′	Latitude.	Réduction de la latitude —		Réduction de la parallaxe — Parallaxe équatoriale. 53′	57′	61′
0°	0′	0″	0′,000	0′,000	0′,000	45°	11′	28″	0′,088	0′,095	0′,102
1	0	24	0 ,000	0 ,000	0 ,000	46	11	27	0 ,091	0 ,098	0 ,105
2	0	48	0 ,000	0 ,000	0 ,000	47	11	26	0 ,095	0 ,102	0 ,109
3	1	12	0 ,000	0 ,001	0 ,001	48	11	24	0 ,098	0 ,105	0 ,112
4	1	36	0 ,001	0 ,001	0 ,001	49	11	21	0 ,101	0 ,108	0 ,116
5	1	59	0 ,001	0 ,001	0 ,002	50	11	17	0 ,104	0 ,111	0 ,119
6	2	23	0 ,002	0 ,002	0 ,002	51	11	13	0 ,107	0 ,115	0 ,123
7	2	46	0 ,003	0 ,003	0 ,003	52	11	7	0 ,110	0 ,118	0 ,126
8	3	10	0 ,003	0 ,004	0 ,004	53	11	1	0 ,113	0 ,121	0 ,130
9	3	33	0 ,004	0 ,005	0 ,005	54	10	54	0 ,116	0 ,124	0 ,133
10	3	55	0 ,005	0 ,006	0 ,006	55	10	46	0 ,119	0 ,127	0 ,136
11	4	18	0 ,006	0 ,007	0 ,007	56	10	37	0 ,121	0 ,131	0 ,140
12	4	40	0 ,008	0 ,008	0 ,009	57	10	28	0 ,124	0 ,134	0 ,143
13	5	1	0 ,009	0 ,010	0 ,010	58	10	18	0 ,127	0 ,137	0 ,146
14	5	23	0 ,010	0 ,011	0 ,012	59	10	7	0 ,130	0 ,140	0 ,149
15	5	44	0 ,012	0 ,013	0 ,014	60	9	55	0 ,132	0 ,142	0 ,153
16	6	4	0 ,013	0 ,014	0 ,015	61	9	43	0 ,135	0 ,145	0 ,156
17	6	25	0 ,015	0 ,016	0 ,017	62	9	30	0 ,138	0 ,148	0 ,159
18	6	45	0 ,017	0 ,018	0 ,019	63	9	16	0 ,140	0 ,151	0 ,161
19	7	5	0 ,019	0 ,020	0 ,022	64	9	2	0 ,143	0 ,153	0 ,164
20	7	22	0 ,021	0 ,022	0 ,024	65	8	47	0 ,145	0 ,156	0 ,167
21	7	40	0 ,023	0 ,024	0 ,026	66	8	31	0 ,147	0 ,159	0 ,170
22	7	58	0 ,025	0 ,027	0 ,029	67	8	14	0 ,150	0 ,161	0 ,172
23	8	14	0 ,027	0 ,029	0 ,031	68	7	58	0 ,152	0 ,163	0 ,175
24	8	31	0 ,029	0 ,031	0 ,034	69	7	40	0 ,154	0 ,166	0 ,177
25	8	47	0 ,032	0 ,034	0 ,036	70	7	22	0 ,156	0 ,168	0 ,180
26	9	2	0 ,034	0 ,037	0 ,039	71	7	3	0 ,158	0 ,170	0 ,182
27	9	16	0 ,036	0 ,039	0 ,042	72	6	43	0 ,160	0 ,172	0 ,184
28	9	30	0 ,039	0 ,042	0 ,045	73	6	24	0 ,162	0 ,174	0 ,186
29	9	43	0 ,042	0 ,045	0 ,048	74	6	4	0 ,163	0 ,176	0 ,188
30	9	56	0 ,044	0 ,048	0 ,051	75	5	44	0 ,165	0 ,177	0 ,190
31	10	7	0 ,047	0 ,050	0 ,054	76	5	23	0 ,166	0 ,179	0 ,191
32	10	18	0 ,050	0 ,053	0 ,057	77	5	1	0 ,168	0 ,180	0 ,193
33	10	28	0 ,052	0 ,056	0 ,060	78	4	40	0 ,169	0 ,182	0 ,195
34	10	37	0 ,055	0 ,059	0 ,064	79	4	18	0 ,170	0 ,183	0 ,196
35	10	46	0 ,058	0 ,063	0 ,067	80	3	55	0 ,171	0 ,184	0 ,197
36	10	54	0 ,061	0 ,066	0 ,070	81	3	33	0 ,172	0 ,185	0 ,198
37	11	1	0 ,064	0 ,069	0 ,074	82	3	10	0 ,173	0 ,186	0 ,199
38	11	7	0 ,067	0 ,072	0 ,077	83	2	46	0 ,174	0 ,187	0 ,200
39	11	13	0 ,070	0 ,075	0 ,081	84	2	23	0 ,175	0 ,188	0 ,201
40	11	17	0 ,073	0 ,079	0 ,084	85	1	59	0 ,175	0 ,189	0 ,202
41	11	21	0 ,076	0 ,082	0 ,088	86	1	36	0 ,176	0 ,189	0 ,202
42	11	24	0 ,079	0 ,085	0 ,091	87	1	12	0 ,176	0 ,189	0 ,203
43	11	26	0 ,082	0 ,088	0 ,095	88	0	48	0 ,176	0 ,190	0 ,203
44	11	27	0 ,085	0 ,092	0 ,098	89	0	24	0 ,177	0 ,190	0 ,203
45	11	28	0 ,088	0 ,095	0 ,102	90	0	0	0 ,177	0 ,190	0 ,203

Ces réductions ont été calculées en supposant l'ellipticité de la terre de $\frac{1}{100}$; mais en ajoutant à chaque nombre ses deux tiers, ou la moitié, ou les trois dixièmes, on aura les réductions correspondantes à l'ellipticité de $\frac{1}{180}$, ou de $\frac{1}{200}$ ou de $\frac{1}{230}$.

(*Voyez* la fin du volume).

Digitized by Google

EXPOSITION

DES MÉTHODES PARTICULIÈRES

EMPLOYÉES DANS LES CALCULS

DES ÉPHÉMÉRIDES DE COÏMBRE.

1. Dans les calculs des lieux de la Lune, qui sont les plus importans, et qui exigent le plus de travail et d'attention, nous employons des procédés particuliers que nous allons développer, persuadés que leur exposition ne manquera pas d'être accueillie par les Astronomes, avec le même intérêt qu'ils ont montré à l'égard de quelques autres articles de nos Éphémérides.

2. On dit que les calculs du *Nautical Almanach* sont faits par deux calculateurs séparés, dont l'un ne calcule que les lieux de midi, l'autre ceux de minuit, et qu'ensuite un troisième calculateur les vérifie tous au moyen des différences portées jusqu'au quatrième ordre. Mais on ne dit pas, si cette vérification sert uniquement à découvrir les erreurs pour répéter de nouveau les calculs des lieux qui en sont affectés, ou bien, si au moyen des mêmes différences l'on a des méthodes pour corriger ces lieux.

3. Quoi qu'il en soit, nous abrégeons de moitié le travail de nos calculs, sans nuire à leur exactitude; il nous suffit d'employer

Digitized by Google

un seul calculateur, et seulement pour les lieux de midi; nous corrigeons les erreurs de ces lieux, au moyen des mêmes différences qui nous les font découvrir; et par une méthode particulière d'interpolation, nous en déduisons les lieux de minuit, et les nombres subsidiaires *A* et *B* correspondans à chacun de ces lieux. C'est que nous allons développer.

§ PREMIER.

Problème fondamental.

4. *Nous supposons que la suite de fonctions*..... $\Gamma\bar{3}$, $\Gamma\bar{2}$, $\Gamma\bar{1}$, $\Gamma 0$, $\Gamma 1$, $\Gamma 2$, $\Gamma 3$.... *est telle, que les différences de l'ordre* $2n$ (n *étant un nombre entier*) *doivent être nulles; mais que quelques erreurs* x, x', x'', *etc. s'étant glissées dans une ou plusieurs de ces fonctions, la suite donnée soit*..... $\Gamma\bar{3}$, $\Gamma\bar{2}$, $\Gamma\bar{1}$, $\Gamma 0+x$, $\Gamma 1+x'$, $\Gamma 2+x''$, $\Gamma 3+x'''$.....; *il s'agit de découvrir les fonctions qui sont affectées d'erreur, et de les corriger.*

Supposons d'abord une seule fonction inexacte $\Gamma 0+x$; en prenant les différences successives, à la manière ordinaire, et aisant abstraction de tout ce qui ne dépend pas de x, nous aurons

Fonct. etc.	1re diff.	2me diff.	3me diff.	4me diff.	5me diff.	6me diff.	7me diff.	8me diff.	
$\Gamma\bar{4}$								$+x$	
$\Gamma\bar{3}$							$-x$	$-8x$	
$\Gamma\bar{2}$						$+x$	$+7x$	$+28x$	
$\Gamma\bar{1}$					$-x$	$-6x$	$-21x$	$-56x$	
$\Gamma 0+x$	$-x$	$+x$	$-x$	$+x$	$+5x$	$+15x$	$+35x$	$+70x$	etc.
$\Gamma 1$	$+x$	$-2x$	$+3x$	$-4x$	$-10x$	$-20x$	$-35x$	$-56x$	
$\Gamma 2$		$+x$	$-3x$	$+6x$	$+10x$	$+15x$	$+21x$	$+28x$	
$\Gamma 3$			$+x$	$-4x$	$-5x$	$-6x$	$-7x$	$-8x$	
$\Gamma 4$				$+x$	$+x$	$+x$	$+x$	$+x$	
etc.									

5. Observons premièrement, que dans cette disposition des différences, toutes celles d'ordre impair correspondent horizontalement aux intervalles qui séparent les fonctions, au lieu que les différences d'ordre pair correspondent directement aux fonctions mêmes: par cette raison, nous ne considérerons maintenant que les différences d'ordre pair.

6. A l'inspection du tableau, il est facile de conclure: 1°. Que dans chaque colonne des différences paires, les coefficiens de x $1-2+1$, $1-4+6-4+1$, etc. sont en général ceux du binome $(1-1)^{2n} = 1 - 2n + \frac{2n(2n-1)}{1.2} -$ etc. 2°. Que l'influence d'une seule erreur x de $\Gamma 0$, s'étend de part et d'autre, depuis les différences des n fonctions précédentes jusqu'à celles des n fonctions suivantes. 3°. Que les différences de l'ordre $2n$ devant être nulles (n° 4), il s'ensuit que toutes celles qu'on y trouvera viendront uniquement de l'erreur x; et que parmi ces différences, celle qui correspond à $\Gamma\bar{n}$, prise avec le même signe, sera la valeur même de x.

7. Ainsi, dès qu'on sera parvenu à la série de différences de l'ordre $2n$, dont les termes commencent par être nuls, le premier qui ne le sera pas et qui est censé correspondre à $\Gamma\bar{n}$, sera l'erreur correspondante à $\Gamma 0$; et en nommant δ, δ', δ'', δ''', etc. la série de ces différences, il est évident qu'il n'y aura point d'autres erreurs dans les fonctions suivantes $\Gamma 1$, $\Gamma 2$, $\Gamma 3$, etc., si l'on a

$$\delta' = -2n\delta,\ \delta'' = +\frac{2n(2n-1)}{1.2}\delta,\ \delta''' = -\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\delta, \text{ etc.}$$

8. Supposons maintenant que les fonctions $\Gamma 1$, $\Gamma 2$, $\Gamma 3$, etc. ont aussi des erreurs x', x'', x''', etc. Ces erreurs se combinant successivement entre elles dans les différences, altèreront les conséquences précédentes; mais pour fixer nos idées sur l'influence réciproque de ces différentes erreurs sur les différences des fonctions données, bornons-nous à considérer les seules différences du huitième ordre. Il est évident que d'après la marche de la seule erreur x, par rapport à la fonction respective $\Gamma 0$, les autres x', x'', x''', etc. seront comme il suit :

Digitized by Google

Fonctions, etc.	Différences du huitième ordre.	
$\Gamma\overline{4}$	$+x$	$=\delta$
$\Gamma\overline{3}$	$-8x+x'$	$=\delta'$
$\Gamma\overline{2}$	$+28x-8x'+x''$	$=\delta''$
$\Gamma\overline{1}$	$-56x+28x'-8x''+x'''$	$=\delta'''\ d$
$\Gamma 0+x$	$+70x-56x'+28x''-8x'''+x^{IV}$	$=\delta^{IV}\ \delta$
$\Gamma 1+x'$	$-56x+70x'-56x''+28x'''-8x^{IV}+x^{V}$	$=\delta^{V}\ \delta'$
$\Gamma 2+x''$	$+28x-56x'+70x''-56x'''+28x^{IV}-8x^{V}$	$=\delta^{VI}\ \delta''$
$\Gamma 3+x'''$	$-8x+28x'-56x''+70x'''-56x^{IV}+28x^{V}$	$=\delta^{VII}$
$\Gamma 4+x^{IV}$	$+x-8x'+28x''-56x'''+70x^{IV}-56x^{V}$	$=\delta^{VIII}$
$\Gamma 5+x^{V}$	$+x'-8x''+28x'''-56x^{IV}+70x^{V}$	$=\delta^{IX}$
$\Gamma 6$	$+x''-8x'''+28x^{IV}-56x^{V}$	$=\delta^{X}\ \delta''$
$\Gamma 7$	$+x'''-8x^{IV}+28x^{V}$	$=\delta^{XI}$

D'où l'on voit que les erreurs x', x'', x''', etc. influent sur toutes les differences, excepté la première δ; et en observant de plus la marche symétrique qu'elles suivent de part et d'autre de leurs fonctions respectives, il est facile de conclure qu'en faisant, pour abréger,

$$2n = A,\ \frac{A(2n-1)}{2} = B,\ \frac{B(2n-2)}{3} = C,\ \frac{C(2n-3)}{4} = D,$$
$$\frac{D(2n-4)}{5} = E, \text{ etc.}$$

on aura, pour la détermination successive de chacune de ces erreurs, les équations

$$\begin{aligned}
x &= \delta \\
x' &= \delta' + Ax \\
x'' &= \delta'' + Ax' - Bx \\
x''' &= \delta''' + Ax'' - Bx' + Cx \\
x^{IV} &= \delta^{IV} + Ax''' - Bx'' + Cx' - Dx \\
x^{V} &= \delta^{V} + Ax^{IV} - Bx''' + Cx'' - Dx' + Ex; \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

9. Il faut remarquer: 1°. Que dans cette solution, on suppose exactes les $2n$ premières fonctions de la suite; car, comme chaque erreur se porte sur les différences de $2n+1$ fonctions, et que

la première différence de l'ordre $2n$ qui n'est pas nulle, correspond à $\Gamma\overline{n}$ jusqu'où s'étend l'erreur de Γo, une erreur dans $\Gamma\overline{n}$ s'étendrait dans les précédentes jusqu'à $\Gamma\overline{(2n+1)}$, il faudra donc qu'il y ait au moins $2n$ fonctions exactes avant celle dont la différence correspondante n'est pas nulle. 2°. Que parmi les coefficiens A, B, C, etc., celui qui occupera le rang $2n$ sera $= 1$, et tous les suivans seront nuls; d'où il suit que la première erreur concourt avec les autres jusqu'à ce même rang, et elle concourt avec un nombre $2n$ d'autres erreurs; la même chose a lieu pour les erreurs x', x'', x''', etc.

10. Il y a pourtant un cas qui échappe à la solution précédente, et à toutes celles qui dépendent des différences, c'est celui où toutes les fonctions auraient une même erreur constante, parce que toutes les différences s'évanouiraient alors comme si toutes les fonctions étaient exactes: et si l'une ou l'autre des fonctions vient à s'écarter de cette erreur commune, les différences ne feront connaître que cet écart, et la correction ne fera que lui rendre l'erreur qui est commune à toutes. Cependant si l'erreur constante ne commence qu'après les $2n$ premières fonctions exactes, alors elle sera indiquée par les différences, et l'on pourra la déterminer par les équations précédentes.

11. On peut résoudre par les mêmes équations ce problème: *Étant donnés les* 2n *premiers termes d'une suite, dont les différences de l'ordre* 2n *soient nulles, trouver tous les autres termes.* Ce problème se réduit au précédent, en supposant nulles toutes les fonctions que l'on cherche, ce qui est la même chose que de supposer que chacune de ces fonctions a une erreur égale à elle-même, et de signe contraire; et par conséquent, en calculant ces erreurs et en changeant le signe, on aura les fonctions demandées.

12. Soit, par exemple, la fonction $3y + 6y^2 - y^3$ dont les différences du quatrième ordre sont nulles. Prenons pour les $2n$ premières fonctions, les valeurs correspondantes à $y = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$, qui sont 8, 22, 36, 44, et supposons que chacune des fonctions suivantes soit $= 0$; cherchons-en les différences jusqu'au quatrième ordre, que nous trouverons ainsi qu'il suit:

Racines.	Fonctions	1res diff.	2mes diff.	3mes diff.	4mes diff.
1	8				
		— 14			
2	22		0		
		— 14		+ 6	
3	36		— 6		— 40
		— 8		+ 46	
4	44		— 52		+ 142
		+ 44		— 96	
5	0		+ 44		— 140
		0		— 44	
6	0		0		+ 44
		0		0	
7	0		0		•
		0		0	
8	0		0		
		0			
9	0				

On aura donc $\delta = -40$, $\delta' = +142$, $\delta'' = -140$, $\delta^{\text{IV}} = +44$, $\delta^{\text{V}} = 0$, $\delta^{\text{VI}} = 0$, etc.; et comme la première erreur δ correspond à la fonction de 3, δ sera donc (n° 7) l'erreur de la fonction de 5, qu'on avait supposée $= 0$: et comme dans ce cas, $A = 4$, $B = 6$, $C = 4$, $D = 1$, E, etc. $= 0$, en substituant ces valeurs dans les équations du n° 8, nous aurons $x = -40$, $x' = -18$, $x'' = +28$, $x''' = +104$, $x^{\text{IV}} = +216$, $x^{\text{V}} = 370$, $x^{\text{VI}} = +572$, etc.; quantités qui, prises avec le signe contraire, donnent les fonctions cherchées.

13. Il est à regreter que ce problème aussi facile qu'il est simple, ne soit applicable qu'aux fonctions rigoureusement exactes, et dont les différences de l'ordre proposé sont exactement nulles; car, pour les fonctions qui ne sont qu'approchées, comme celles dont nous voulons nous occuper, la plus légère inexactitude dans la première différence δ, ou dans la première erreur x, augmentera la valeur de x'; l'une et l'autre augmenteront x'', et ainsi de suite, en raison des multiplications successives, par les coefficiens A, B, C, etc.; ces coefficiens étant d'ailleurs d'autant plus considérables, que l'ordre des différences sera plus élevé. Il faut donc, dans ce cas, chercher séparément chaque erreur, sans la faire dépendre des erreurs précédentes, et cela, au moyen des différences corres-

Digitized by Google

pondantes aux mêmes fonctions inexactes, et dans lesquelles l'influence des erreurs respectives devient plus sensible: c'est ce que nous allons voir.

§ II.

Problèmes particuliers.

14. En supposant exactes les n premières fonctions de la série proposée, et que les suivantes $\Gamma 0$, $\Gamma 1$, $\Gamma 2$, etc. aient les erreurs x, x', x'', etc.; nommons maintenant δ, δ', δ'', etc. les différences de l'ordre $2n$, correspondantes à ces dernières fonctions: il est aisé de voir (n° 8) que chacune de ces différences contient l'erreur de la fonction correspondante multipliée par le terme moyen du binome $(1-1)^{2n}$, et que les coefficiens des erreurs des fonctions suivantes et des précédentes sont respectivement les termes suivans et les précédens du terme moyen du même binome. Or, ce terme moyen est

$$\frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,\ldots\ldots\,(2n-(n-1)}{1\qquad 2\qquad\qquad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

ou plus simplement, en prenant les facteurs du numérateur dans l'ordre inverse, $\frac{(n+1)\,(n+2)\,\ldots\ldots\,(n+n)}{1\qquad 2\ldots\ldots\ldots\ldots n}$; ce terme est positif si n est pair, et négatif s'il est impair.

15. En supposant donc dès à présent

$$A=\frac{n(n+1)\,(n+2)\,\ldots\ldots\,(n+n)}{1\qquad 2\ldots\ldots\ldots\ldots n},\quad B=\frac{n}{n+1},\quad C=\frac{n\,(n-1)}{(n+1)\,(n+2)},$$

$$D=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)},\qquad E=\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)},$$

etc.

on voit que l'ordre des termes du binome $(1-1)^{2n}$, qui suivent ou qui précèdent le *maximum* **A**, sera $-AB$, $+AC$, $-AD$, $+AE$, — etc.; et que par conséquent on aura, pour déterminer les erreurs x, x', x'', etc., les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
x - Bx' + Cx'' - Dx''' + Ex'''' - Fx^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta}{A}\\
-Bx + x' - Bx'' + Cx''' - Dx'''' + Ex^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta'}{A}\\
+Cx - Bx' + x'' - Bx''' + Cx'''' - Dx^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta''}{A}\\
-Dx + Cx' - Bx'' + x''' - Bx'''' + Cx^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta'''}{A}\\
+Ex - Dx' + Cx'' - Bx''' + x'''' - Bx^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta''''}{A}\\
-Fx + Ex' - Dx'' + Cx''' - Bx'''' + x^{v} \text{ etc.} &= \frac{\delta^{v}}{A};
\end{aligned}$$

Ces équations, très-remarquables par leur symétrie, sont par-là, plus faciles à résoudre que toutes autres en pareil nombre.

16. D'un autre côté, en nommant aussi d la différence qui précède δ, et d' celle qui suit immédiatement après la différence correspondante à la dernière fonction supposée inexacte, on voit également (n° 8) que d ne dépend que des erreurs des fonctions suivantes et d' que de celles des fonctions précédentes; d'où il résulte pour la vérification de cette supposition, les deux équations

$$\begin{aligned}
\frac{d}{A} &= -Bx + Cx' - Dx'' + Ex''' - Fx'''' \text{ etc.}\\
\frac{d'}{A} &= -B(x) + C(x)' - D(x)'' + E(x)''' - F(x)'''' \text{ etc.}
\end{aligned}$$

bien entendu que dans la seconde (x) désigne la dernière erreur, $(x)'$ l'avant-dernière, et ainsi de suite, en ordre inverse.

17. Une résolution générale de ces équations n'étant pas possible, nous allons nous occuper des solutions particulières pour une, deux, etc. fonctions.

I. *Supposons une seule fonction inexacte, on demande de déterminer l'erreur de cette fonction, et les conditions de l'indépendance de cette erreur.*

Dans ce cas, la première équation (n° 15) donne immédiatement $x = \frac{\delta}{A}$, et les deux (n° 16) donnent l'une et l'autre $\frac{d}{A} = -Bx$

et $\frac{d'}{A} = -Bx$; et par conséquent, $d = d' = -ABx = -\frac{n\delta}{n+1}$.

Ce cas, aussi facile à corriger qu'aisé à découvrir, est en même temps celui qu'on rencontrera le plus souvent dans la pratique, parce qu'il n'est pas probable qu'un calculateur exercé se trompe plusieurs fois de suite.

18. II. *Supposons maintenant qu'il n'y a dans la série que deux fonctions inexactes ; déterminer les deux erreurs et les conditions propres à ce cas.*

Les deux premières équations (n° 15) se réduisent à

$$x - Bx' = \frac{\delta}{A}, \text{ et } -Bx + x' = \frac{\delta'}{A},$$

dont la somme et la différence donnent

$$x + x' = \frac{\delta' + \delta}{A(1-B)}, \text{ et } x' - x = \frac{\delta' - \delta}{A(1+B)},$$

et par conséquent

$$x = \frac{\delta' + \delta}{2A(1-B)} - \frac{(\delta' - \delta)}{2A(1+B)}, \quad x' = \frac{\delta' + \delta}{2A(1-B)} + \frac{\delta' - \delta}{2A(1+B)};$$

et en substituant les valeurs de $1-B = \frac{1}{n+1}$ et de $1+B = \frac{2n+1}{n+1}$, on aura

$$x = \frac{(n+1)(\delta(n+1) + \delta' n)}{A(2n+1)}, \quad x' = \frac{(n+1)(\delta n + \delta'(n+1))}{A(2n+1)}.$$

19. Les équations (n° 16) deviennent, dans ce cas,

$$\frac{d}{A} = -Bx + Cx', \text{ et } \frac{d'}{A} = -Bx' + Cx,$$

qui, étant traitées de la même manière, donnent

$$\frac{d' + d}{A} = -(B-C)(x' + x), \quad \frac{d' - d}{A} = -(B+C)(x' - x);$$

en substituant, dans ces dernières, les valeurs de $x' + x$ et de $x' - x$ trouvées précédemment, on obtient

$$d' + d = -\frac{(B-C)(\delta' + \delta)}{1-B}, \quad d' - d = -\frac{(B+C)(\delta' - \delta)}{1+B};$$

et en y substituant les valeurs de $1 - B$, $1 + B$, et celles de

$$B - C = \frac{3n}{(n+1)(n+2)}, \quad B + C = \frac{n(2n+1)}{(n+1)(n+2)},$$

on aura enfin

$$d = -\frac{n(2\delta + \delta')}{n+2}, \quad d' = -\frac{n(\delta + 2\delta')}{n+2}.$$

20. III. *Déterminer les erreurs de trois fonctions successives, et les conditions propres à ce cas.*

Nous avons pour cela (n° 15) les trois équations

$$\begin{aligned} x - Bx' + Cx'' &= \frac{\delta}{A} \\ -Bx + x' - Bx'' &= \frac{\delta'}{A} \\ Cx - Bx' + x'' &= \frac{\delta''}{A}. \end{aligned}$$

En prenant la différence de la première à la troisième, puis leur somme, et en substituant dans cette dernière la valeur de x' tirée de la seconde, on obtient

$$\begin{aligned} x'' + x &= \frac{\delta'' + 2B\delta' + \delta}{A(1 - 2B^2 + C)} \\ x'' - x &= \frac{\delta'' - \delta}{A(1 - C)} \\ x' &= \frac{\delta'}{A} + \frac{B(\delta'' + 2B\delta' + \delta)}{A(1 - 2B^2 + C)}. \end{aligned}$$

Substituant dans ces équations les valeurs de

$$1 - C = \frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad 1 - 2B^2 + C = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)},$$

et prenant la demi-somme et la demi-différence des deux premières, on aura

$$\begin{aligned} x &= \frac{(n+1)(n+2)((n+2)\delta + 2n\delta' + n\delta'')}{4A(2n+1)} \\ x' &= \frac{(n+1)(n(n+2)(\delta + \delta'') + 2(n^2 + n + 1)\delta')}{2A(2n+1)} \\ x'' &= \frac{(n+1)(n+2)(n\delta + 2n\delta' + (n+2)\delta'')}{4A(2n+1)}. \end{aligned}$$

21. Quant aux équations de condition, on a (n° 16)

$$\frac{d}{A} = -Bx + Cx' - Dx'' \text{ et } \frac{d''}{A} = -Bx'' + Cx' - Dx,$$

dont la somme et la différence, en y substituant les valeurs de x', $x'' + x$, $x'' - x$, donnent

$$d'' - d = -\frac{(B-D)(\delta'' - \delta)}{1-C},$$

$$d'' + d = 2C\delta' - \frac{(B - 2BC + D)(\delta'' + 2B\delta' + \delta)}{1 - 2B^2 + C};$$

et par la substitution des valeurs des coefficiens B, C, D (n° 15), on aura enfin

$$d = -\frac{n((n+2)(3\delta + \delta'') + 3(n+1)\delta')}{(n+2)(n+3)},$$

$$d'' = -\frac{n((n+2)(\delta + 3\delta'') + 3(n+1)\delta')}{(n+2)(n+3)}.$$

22. IV. *Déterminer les erreurs de quatre fonctions, et les conditions de ce cas.*

On a alors (n° 15) les quatre équations

$$\begin{aligned}
x - Bx' + Cx'' - Dx''' &= \frac{\delta}{A} \\
-Bx + x' - Bx'' + Cx''' &= \frac{\delta'}{A} \\
+Cx - Bx' + x'' - Bx''' &= \frac{\delta''}{A} \\
-Dx + Cx' - Bx'' + x''' &= \frac{\delta'''}{A};
\end{aligned}$$

en prenant la somme des deux extrêmes, celle des moyennes, et les différences des unes et des autres, il en résultera d'abord

$$\begin{aligned}
(1-D)(x''' + x) - (B-C)(x'' + x') &= \frac{\delta''' + \delta}{A} \\
-(B-C)(x''' + x) + (1-B)(x'' + x') &= \frac{\delta'' + \delta'}{A} \\
(1+D)(x''' - x) - (B+C)(x'' - x') &= \frac{\delta''' - \delta}{A} \\
-(B+C)(x''' - x) + (1+B)(x'' - x') &= \frac{\delta'' - \delta'}{A};
\end{aligned}$$

Digitized by Google

et en séparant ensuite les sommes et les différences des inconnues, il viendra

$$x'' + x = \frac{(1-B)(\delta''+\delta)+(B-C)(\delta''+\delta')}{A((1-B)(1-D)-(B-C)^2)},$$

$$x' + x' = \frac{(B-C)(\delta''+\delta)+(1-D)(\delta''+\delta')}{A((1-B)(1-D)-(B-C)^2)},$$

$$x'' - x = \frac{(1+B)(\delta''-\delta)+(B+C)(\delta''-\delta')}{A((1+B)(1+D)-(B+C)^2)},$$

$$x' - x' = \frac{(B+C)(\delta''-\delta)+(1+D)(\delta''-\delta')}{A((1+B)(1+D)-(B+C)^2)}.$$

23. Si maintenant l'on substitue les valeurs de

$$1-B=\frac{1}{n+1}, B-C=\frac{3n}{(n+1)(n+2)}, 1-D=\frac{3(3n^2+3n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$1+B=\frac{2n+1}{n+1}, B+C=\frac{n(2n+1)}{(n+1)(n+2)}, 1+D=\frac{(2n+1)(n^2+n+6)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$(1-B)(1-D)-(B-C)^2=\frac{12(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)},$$

$$(1+B)(1+D)-(B+C)^2=\frac{4(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)},$$

et si, pour abréger, on fait $\Delta = \frac{(n+1)(n+2)}{12A(2n+1)(2n+3)}$; qu'on prenne ensuite les demi-sommes et les demi-différences, on aura, après les réductions,

$$x = \Delta\,(n+3)\left\{\begin{array}{l}\delta(n+2)(n+3)+3\delta' n(n+2)\\ +3\delta'' n(n+1)+\delta''' n(n+2)\end{array}\right\}$$

$$x' = 3\Delta\left\{\begin{array}{l}\delta n(n+2)(n+3)+\delta'(n+2)(3n^2+2n+3)\\ +\delta'' n(3n^2+7n+6)+\delta''' n(n+1)(n+3)\end{array}\right\}$$

$$x'' = 3\Delta\left\{\begin{array}{l}\delta n(n+1)(n+3)+\delta' n(3n^2+7n+6)\\ +\delta''(n+2)(3n^2+2n+3)+\delta''' n(n+2)(n+3)\end{array}\right\}$$

$$x''' = \Delta\,(n+3)\left\{\begin{array}{l}\delta n(n+2)+3\delta' n(n+1)\\ +3\delta'' n(n+2)+\delta'''(n+2)(n+3)\end{array}\right\}$$

24. Les équations de condition (n° 16) seront, dans ce cas,

$$\frac{d}{A} = -Bx + Cx' - Dx'' + Ex''',$$

$$\frac{d'}{A} = -Bx'' + Cx''' - Dx' + Ex,$$

Digitized by Google

lesquelles donnent

$$\frac{\delta'+\delta}{A} = -(B-E)(x''+x)+(C-D)(x'+x'),$$
$$\frac{\delta'-\delta}{A} = -(B+E)(x''-x)+(C+D)(x'-x');$$

et en y substituant les valeurs de $x''+x$, $x''-x$, $x'+x'$, $x'-x$ qu'on vient de trouver, et celles de

$$C-D=\frac{5n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)},\quad C+D=\frac{n(n-1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$
$$B-E=\frac{15n(n^2+n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\quad B+E=\frac{n(2n+1)(n^2+n+18)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

on trouvera, après les réductions convenables,

$$\delta = -\frac{n[(n+3)(4\delta+\delta'')+2(n+1)(3\delta'+2\delta'')]}{(n+3)(n+4)},$$
$$\delta' = -\frac{n[(n+3)(\delta+4\delta'')+2(n+1)(2\delta'+3\delta'')]}{(n+3)(n+4)}.$$

25. V. *Déterminer les erreurs de cinq fonctions, et les conditions de ce cas.*

Les équations de ce problème sont (n° 15)

$$\begin{aligned}
x - Bx' + Cx'' - Dx''' + Ex^{IV} &= \frac{\delta}{A}\\
-Bx + x' - Bx'' + Cx''' - Dx^{IV} &= \frac{\delta'}{A}\\
+Cx - Bx' + x'' - Bx''' + Cx^{IV} &= \frac{\delta''}{A}\\
-Dx + Cx' - Bx'' + x''' - Bx^{IV} &= \frac{\delta'''}{A}\\
+Ex - Dx' + Cx'' - Bx''' + x^{IV} &= \frac{\delta^{IV}}{A}.
\end{aligned}$$

Prenons la somme et la différence de la première et de la cinquième, ensuite de la seconde et de la quatrième, et nous aurons

Digitized by Google

$$(1-E)(x^{IV}-x)-(B-D)(x''-x')=\frac{\delta^{IV}-\delta}{A}$$
$$-(B-D)(x^{IV}-x)+(1-C)(x''-x')=\frac{\delta''-\delta'}{A}$$
$$(1+E)(x^{IV}+x)-(B+D)(x''+x')+2Cx^{I}=\frac{\delta^{IV}+\delta}{A}$$
$$-(B+D)(x^{IV}+x)+(1+C)(x''+x')-2Bx^{I}=\frac{\delta''+\delta'}{A}.$$

26. Les deux premières de ces équations donnent

$$x^{IV}-x=\frac{(1-C)(\delta^{IV}-\delta)+(B-D)(\delta''-\delta')}{A((1-C)(1-E)-(B-D)^2)},$$
$$x''-x'=\frac{(B-D)(\delta^{IV}-\delta)+(1-E)(\delta''-\delta')}{A((1-C)(1-E)-(B-D)^2)}.$$

En substituant dans les deux autres la valeur de

$$x^{I}=\frac{\delta^{I}}{A_{I}}+B(x''+x')-C(x^{IV}+x)$$

tirée de la troisième équation fondamentale, et faisant pour abréger

$$1-2B^2+C=M,\quad 1-2C^2+E=N,\quad B-2BC+D=P,$$

on aura

$$x^{IV}+x=\frac{M(\delta-2C\delta''+\delta^{IV})+P(\delta'+2B\delta''+\delta'')}{A(MN-P^2)},$$
$$x''+x'=\frac{P(\delta-2C\delta''+\delta^{IV})+N(\delta'+2B\delta''+\delta'')}{A(MN-P^2)}.$$

27. Substituant maintenant les valeurs de

$$1-C=\frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)},\quad B-D=\frac{4n(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$
$$1-E=\frac{8(2n+1)(n^2+n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$
$$(1-C)(1-E)-(B-D)^2=\frac{48(2n+1)^2(2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)},$$
$$M=\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)},\quad N=\frac{16(2n+1)(2n^3+6n^2+4n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)(n+4)},$$

$P=\frac{8n(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}$, $MN-P^2=\frac{96(2n+1)^2(2n+3)}{(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^2(n+4)}$

et dans l'équation $x''=\frac{\delta''}{A}+B(x''+x')-C(x^{IV}+x)$
les valeurs précédentes de $x''+x'$, $x^{IV}+x$, et faisant de plus

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{96A(2n+1)(2n+3)}=\Delta,$$

on aura, après les réductions,

$$x=\Delta(n+4)\left\{\begin{matrix}\delta(n+3)(n+4)+4n\delta'(n+3)\\+6\delta''n(n+1)+4n\delta''(n+1)+n\delta^{IV}(n+3)\end{matrix}\right\}$$

$$x'=4\Delta\left\{\begin{matrix}\delta n(n+3)(n+4)+2\delta'(2n^3+7n^2+5n+6)\\+6n\delta''(n^2+2n+2)\\+2n\delta''(2n^2+5n+3)+n\delta^{IV}(n+1)(n+4)\end{matrix}\right\}$$

$$x''=\frac{6\Delta}{(n+3)}\left\{\begin{matrix}n(n+1)(n+3)(n+4)(\delta+\delta^{IV})\\+4n(n+3)(n^2+2n+2)(\delta'+\delta'')\\+2\delta''(3n^4+12n^3+19n^2+14n+12)\end{matrix}\right\}$$

$$x''=4\Delta\left\{\begin{matrix}\delta n(n+1)(n+4)+2n\delta'(2n^2+5n+3)\\+6n\delta''(n^2+2n+2)\\+2\delta''(2n^3+7n^2+5n+6)+n\delta^{IV}(n+3)(n+4)\end{matrix}\right\}$$

$$x^{IV}=\Delta(n+4)\left\{\begin{matrix}\delta n(n+3)+4\delta' n(n+1)+6\delta'' n(n+1)\\+4\delta'' n(n+3)+\delta^{IV}(n+3)(n+4)\end{matrix}\right\}$$

28. Les équations de condition seront, dans ce cas,

$$\frac{d}{A}=-Bx+Cx'-Dx''+Ex''-Fx^{IV}$$

$$\frac{d''}{A}=-Bx^{IV}+Cx''-Dx''+Ex'-Fx;$$

d'où il vient, en éliminant x'',

$$\frac{d''-d}{A}=-(B-F)(x^{IV}-x)+(C-E)(x''-x')$$

$$\frac{d''+d}{A}=-\frac{2D\delta''}{A}-(B-2CD+F)(x^{IV}+x)+(C-2BD+E)(x''+x').$$

29. En substituant dans ces dernières équations les valeurs précé-

Digitized by Google

dentes de $x'' + x$, $x'' - x$, $x'' + x'$, $x'' - x'$, et celles de

$$C - E = \frac{6n(n-1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$B - F = \frac{12n(2n+1)(n^2+n+8)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)},$$

$$C - 2BD + E = \frac{18n(n-1)(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$B - 2CD + F = \frac{72n(2n+1)(n^3+3n^2+2n+4)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)(n+4)(n+5)},$$

on aura enfin

$$d = -\frac{n[(n+3)(n+4)(5\delta + \delta'') + 5(n+1)(n+3)(2\delta' + \delta'') + 10(n+1)(n+2)\delta'']}{(n+3)(n+4)(n+5)},$$

$$d' = -\frac{n[(n+3)(n+4)(\delta + 5\delta'') + 5(n+1)(n+3)(\delta' + 2\delta'') + 10(n+1)(n+2)\delta'']}{(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

30. Les applications des formules générales (n°s 15, 16) aux problèmes de 6, 7, 8 fonctions inexactes, seraient encore traitables; mais nous avons cru devoir les supprimer, parce que, outre le grand travail du calcul, les formules commencent à devenir chaque fois moins exactes pour la pratique, en raison des grands coefficiens numériques de δ, δ', δ'', etc.

§ III.

Application des problèmes précédens au cas des différences huitièmes ou de $n = 4$.

31. Nous supposons que dans la série des lieux de la Lune, calculés de 24 en 24 heures, les différences du huitième ordre sont nulles; et quoique cette supposition ne soit pas d'une vérité rigoureuse, du moins elle en approche autant qu'on peut le desirer sur cette matière. Nous allons donc réduire à ce seul cas tous les problèmes précédens.

32. Ainsi, en supposant $n = 4$, nous aurons d'abord $A = 70$:

et en supposant toujours (n° 14) que les fonctions ou les lieux successifs de la Lune, $\Gamma 0$, $\Gamma 1$, $\Gamma 2$, etc. aient les erreurs x, x', x'', etc., et que les huitièmes différences correspondantes soient δ, δ', δ'', etc.; et désignant toujours par d la différence précédente à δ, et par d' la différence qui suit immédiatement celle qui correspond à la dernière fonction inexacte, tout comme il a été indiqué dans la dernière colonne du tableau du n° 8, on aura, suivant l'ordre des mêmes problèmes, les formules suivantes.

I.

Une seule fonction inexacte.

33. $$d = d' = -\frac{4\delta}{5}, \quad x = \frac{\delta}{70}.$$

II.

Deux fonctions.

34. $$\left\{\begin{array}{l} d = -\frac{4\delta + 2\delta'}{3} \\ d' = -\frac{2\delta + 4\delta'}{3} \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{5\delta + 4\delta'}{126} \\ x' = \frac{4\delta + 5\delta'}{126} \end{array}\right\}$$

III.

Trois fonctions.

35. $$\left\{\begin{array}{l} d = -\frac{12\delta + 10\delta' + 4\delta''}{7} \\ d' = -\frac{4\delta + 10\delta' + 12\delta''}{7} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3\delta + 4\delta' + 2\delta''}{42} \\ x' = \frac{7\delta' + 4(\delta + \delta'')}{42} \\ x'' = \frac{2\delta + 4\delta' + 3\delta''}{42} \end{array}\right\}$$

IV.

Quatre fonctions:

36.
$$\left\{\begin{array}{l} d = -\dfrac{28\delta + 30\delta' + 20\delta'' + 7\delta'''}{14} \\ d' = -\dfrac{7\delta + 20\delta' + 30\delta'' + 28\delta'''}{14} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{7\delta + 12\delta' + 10\delta'' + 4\delta'''}{66} \\ x' = \dfrac{84\delta + 177\delta' + 164\delta'' + 70\delta'''}{462} \\ x'' = \dfrac{70\delta + 164\delta' + 177\delta'' + 84\delta'''}{462} \\ x''' = \dfrac{4\delta + 10\delta' + 12\delta'' + 7\delta'''}{66} \end{array}\right\}$$

V.

Cinq fonctions.

37.
$$\left\{\begin{array}{l} d = -\dfrac{280\delta + 350\delta' + 300\delta'' + 175\delta''' + 56\delta^{IV}}{126} \\ d' = -\dfrac{56\delta + 175\delta' + 300\delta'' + 350\delta''' + 280\delta^{IV}}{126} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{14\delta + 28\delta' + 30\delta'' + 20\delta''' + 7\delta^{IV}}{99} \\ x' = \dfrac{56\delta + 138\delta' + 156\delta'' + 110\delta''' + 40\delta^{IV}}{198} \\ x'' = \dfrac{477\delta'' + 364(\delta' + \delta''') + 140(\delta + \delta^{IV})}{462} \\ x''' = \dfrac{40\delta + 110\delta' + 156\delta'' + 133\delta''' + 56\delta^{IV}}{198} \\ x^{IV} = \dfrac{7\delta + 20\delta' + 30\delta'' + 28\delta''' + 14\delta^{IV}}{99} \end{array}\right\}$$

38. Il est bon de remarquer, que si parmi les fonctions succes-

Digitized by Google

sives supposées inexactes, il s'en trouve qui ne le soient pas, les mêmes formules les feront connaître, en donnant leurs erreurs respectives = o. Mais si l'on se trompait sur le rang qu'occupent dans la série des fonctions, les deux fonctions inexactes extrêmes; c'est-à-dire : si l'on prenait, par exemple, la seconde fonction inexacte au lieu de la première, ce serait la même chose que de supposer δ' au lieu de δ, ce qui rendrait fautives les déterminations de x, x', etc.; mais les équations de condition seront un moyen sûr pour reconnaître la chose : car, comme il faut que la première fonction inexacte soit précédée au moins de quatre fonctions exactes, et que la dernière des inexactes soit suivie de qnatre autres fonctions exactes, par les conditions susdites, on en trouvera alors cinq.

39. Observons de plus, que les erreurs x, x', etc. doivent être ajoutées avec le signe contraire, aux fonctions respectives données pour avoir les fonctions corrigées; car φ étant la fonction exacte correspondante à la fonction inexacte donnée F, et dont l'erreur est x, on aura $\varphi + x = F$, et par conséquent $\varphi = F - x$.

§ IV.

Usage des formules précédentes.

40. Il y a dans une série de lieux calculés, deux objets auxquels il s'agit de satisfaire ici : l'un, de distinguer d'entre les lieux admissibles comme suffisamment exacts, ceux qui ont besoin d'une correction; et l'autre, de déterminer cette correction. Il suffit, pour le premier, d'avoir les quatrièmes différences; mais, quant au second, il faudra calculer les huitièmes différences des lieux seulement reconnus comme inexacts, de celui qui les précède et de celui qui les suit.

41. En observant (n° 4) la manière dont les différens ordres de différences dérivent les uns des autres, on voit bien qu'on peut obtenir immédiatement les quatrièmes différences, sans qu'il soit nécessaire de passer par les intermédiaires, au moyen de la formule $d^4\Gamma n = 6\Gamma n + \Gamma(n+2) + \Gamma(n-2) - 4[\Gamma(n+1) + \Gamma(n-1)]$:

Digitized by Google

considérant ensuite la série des quatrièmes différences comme une nouvelle série de fonctions, les quatrièmes différences de celle-ci, calculées d'après la même règle, seront évidemment les huitièmes différences de la série primitive des lieux.

42. La pratique de cette règle devient beaucoup plus expéditive, si l'on néglige les degrés, avant et après les sommes et les multiplications; en observant pour cela, qu'il est inutile de multiplier par 6 les dixaines de minutes: de plus, comme ces différences sont peu considérables, toutes les fois qu'on aura à retrancher un grand nombre de minutes d'un autre assez petit, il faudra ajouter à ce dernier 60′. Ainsi, au lieu de $-5,23+57,42=52,19$, on doit prendre $-65,23+57,42=-7,81$.

43. Il faut pourtant observer que cet expédient de négliger les degrés, par lequel on abrège, de plus de moitié, le temps et le travail, est sujet à deux inconvéniens, rares à la vérité, mais dont il faut cependant être averti. Le premier a lieu, lorsqu'on s'est trompé sur quelque chiffre des degrés; parce que malgré cette grande erreur, ou les fonctions paraîtront admissibles, ou bien les corrections qu'on en trouvera seront dues à d'autres erreurs plus petites, sans qu'on puisse s'appercevoir de la première. Mais comme on sera obligé, pour l'interpolation, de prendre les premières et les secondes différences, cette erreur reparaîtra alors, et sera corrigée.

44. L'autre cas aura lieu, lorsque l'erreur sera de 10′ et au-dessus; parce qu'en la multipliant par 6, ou par 4, si elle surpasse 15′, le produit donnera des degrés qu'on retranche. Mais la série même des quatrièmes différences suffira pour la faire découvrir; parce qu'une erreur plus forte que les différences correspondantes aux fonctions exactes, et même à celles qui n'ont que de légères inexactitudes, ne manquera pas d'être apperçue, et sera égale, à peu de chose près, à la première des différences irrégulières. La même erreur devant se trouver quatre fois plus grande et de signe contraire dans la différence suivante, et six fois avec le même signe dans celle d'après (n° 4); il sera donc très-facile de voir combien de fois 60′ il faudra ajouter ou retrancher à ces différences pour satisfaire à ces conditions: en cas de doute, on prendra le parti de les calculer de nouveau, en tenant compte des degrés.

Digitized by Google

45. *Exemple.* Supposons qu'en calculant les latitudes de la Lune, pour le mois d'avril 1807, on ait trouvé

Jours.	*Lat.* ☾	*Diff. 4ᵉˢ*		*Diff. 8ᵉˢ*
13.	— 1° 19′,40	+ 0′,31.....	+ 0′,31	
14.	— 2 25,96	+ 0,10.....	+ 0,10	
15.	— 3 25,93	+ 19,91.....	+ 19,91	
16.	— 4 15,34	+ 39,44 — 120′	— 80,56	— 1120′,10 *d*
17.	— 4 30,31	— 1,12 + 120	+ 118,88	+ 1400,18 *f*
18.	— 5 7,52	— 21,68 — 60	— 81,68	— 1120,30 *d′*
19.	— 5 4,77	+ 18,03.....	+ 18,03	
20.	— 4 41,54	— 2,02.....	— 2,02	
21.	— 3 59,28	— 1,35.....	— 1,35	

En prenant les quatrièmes différences selon la règle (nᵒˢ 41, 42), on trouve pour le 15, + 19,91 différence trop forte par rapport aux précédentes, et par conséquent, d'après la remarque (nº 44), les trois différences suivantes doivent être à-peu-près — 80′, + 120′, — 80′. D'où il suit qu'on devra appliquer à la première, la correction — 120′, à la seconde + 120′, et à la troisième —60′; ce qui les réduit à — 80,56, + 118,88, — 81,68; résultat qu'on aurait obtenu en faisant les opérations en entier, sans négliger les degrés.

46. Il peut arriver aussi quelques cas d'exception à la règle que nous avons donnée ci-dessus, nº 42, surtout si les différences ne sont pas très-petites, comme elles le sont ordinairement. Ceci aura lieu, lorsqu'il y aura une erreur considérable, quoiqu'au-dessous de 10′; parce qu'alors il peut arriver que la différence cherchée, dans l'exemple de la même règle, doive être + 52′, 19, au lieu de — 7′, 81. Mais ces deux valeurs ambiguës étant les compléments l'une de l'autre pour 60′ et de signe contraire, il sera toujours facile de reconnaître par le signe, comme dans le cas précédent, laquelle des deux il faudra employer: en cas de doute, on répétera les opérations en entier.

47. On calcule les huitièmes différences, ainsi que nous l'avons dit (nº 41), en regardant les quatrièmes différences, comme une nouvelle suite de fonctions; mais on en doit faire le calcul en entier, et ne point négliger les degrés ou soixantaines de minutes,

Digitized by Google

lorsqu'il s'en trouvera, soit avant, soit après les opérations. En opérant ainsi pour les jours 16, 17, 18 du même exemple, on trouve les huit lettres différences correspondantes désignées dans le tableau, par les tièmes d, δ, d'. Et l'on peut remarquer que ces différences sont dans le cas du problème I (n° 33), parce que $-\frac{4}{5}\delta = -1120'',14$, et par conséquent $\frac{\delta}{70} = 20'',002$ sera l'erreur de la latitude du 17 avril, donc, $-4° 50',31$ sera la vraie latitude ce jour là.

48. *Dans une série donnée de lieux de la Lune, on demande de reconnaître, au moyen des quatrièmes différences, quels sont les lieux qu'on peut admettre comme suffisamment exacts, et ceux où il y a des erreurs.*

Si les différences quatrièmes suivent une marche régulière en croissant d'abord par degrés jusqu'à un certain point, puis en diminuant, ou réciproquement, et de manière qu'il n'y ait de changement de signe que lorsqu'elles seront très-petites, il y aura tout lieu de croire que les fonctions d'où elles dérivent sont régulières, et que leurs différences tendent à devenir nulles dans les ordres suivans. Ceci se déduit de la nature même de ces fonctions; parce que l'expression générale de chacune d'elles étant composée de termes proportionnels aux sinus d'arcs qui sont comme les temps, en réduisant ces sinus en séries de puissances, il est évident que les différences successives d'une pareille fonction tendent à devenir nulles.

49. Au contraire, si les mêmes différences croissent ou diminuent très-inégalement, si, allant d'abord en augmentant, elles diminuent ensuite pour recommencer à croître, ou réciproquement, si elles changent de signe sans être trop petites, et même étant petites, s'il y a des alternatives de signe; c'est un indice certain qu'il s'est introduit dans les fonctions une ou plusieurs erreurs qui, causant ces irrégularités sur les différences du quatrième ordre, les augmenteront chaque fois plus dans les ordres supérieurs.

50. *Dans une série de lieux calculés, connaître, d'après leurs quatrièmes différences, quels sont le premier et le dernier des lieux inexacts, et déterminer à-peu-près leurs corrections.*

Comme dans cet ordre de différences, l'erreur de chaque fonction ne s'étend que depuis la différence qui répond à la seconde

fonction précédente jusqn'à celle qni répond à la seconde suivante (n° 4), il s'ensuit que la première différence qui s'écartera de la marche régulière des précédentes, nous montrera que la première fonction inexacte est la seconde des suivantes; et que pareillement, la différence où finit l'irrégularité indiquera que la seconde fonction précédente sera la dernière des inexactes. Il peut, entre ces deux fonctions inexactes extrêmes, s'en trouver quelques-unes qui soient exactes, qui cependant n'interromperont pas la suite des différences irrégulières, ou qui ne se suivent pas en nombre suffisant pour qu'on puisse séparer les fonctions inexactes en deux systèmes indépendans, tels que, dans les différences, les erreurs de l'un n'influent point sur celles de l'autre.

51. Par la marche des différences précédentes et des suivantes, on peut juger à-peu-près quelle devrait être la valeur du premier ou du dernier de ces nombres qui s'écartera de la régularité. Or, d'après ce qu'on a vu (n° 4), en nommant x l'erreur de la seconde fonction suivante, ou de la seconde précédente, Δ la différence qui devrait avoir lieu selon la marche régulière des différences, et Δ' celle qui a lieu en raison de ladite erreur, on aura $x + \Delta = \Delta'$, et partant, $x = \Delta' - \Delta$.

52. Si l'on pouvait déterminer exactement Δ, toutes les autres corrections seraient également déterminées par ce moyen. Car ayant corrigé par-là les fonctions extrêmes, en prenant de nouveau les quatrièmes différences, on trouverait de même les erreurs de deux autres fonctions, et ainsi de suite. Mais la loi des différences qui précèdent et de celles qui suivent, loi que l'on suppose régulière, ne l'est presque jamais que d'une manière approchée, parce que les lieux calculés de la Lune, dépendent de tant d'équations et de tant de parties proportionnelles, que, malgré la plus grande attention, personne ne pourra jamais répondre de l'exactitude du calcul à deux ou trois secondes près. D'un autre côté, comme nous déduisons chaque erreur x de la différence où elle se trouve isolée, et sans le concours des autres, et même sans être multipliée par un coefficient qui, en faisant la division, pourrait compenser les autres erreurs; il est clair que ce procédé ne peut servir qu'à découvrir quels sont les lieux inexacts, et quel en est le nombre,

Digitized by Google

afin d'en prendre ensuite les huitièmes différences. Tout cela sera mieux éclairci par les exemples suivans.

53. *Exemple I.* Supposons qu'on ait trouvé depuis le 29 mai jusqu'au 21 juin 1807, les longitudes suivantes de la Lune.

	Jours.	*Long.* ☾	*Diff.* 4me	*Diff.* 8me
Mai	29.	339° 13′,11	— 0′,05	
	30.	351 6,33	— 0,19	
	31.	3 1,43	— 0,48	
Juin	1.	15 2,74	— 0,65	+ 0′,56
	2.	27 14,11	— 0,91	— 0,84 *d*
	3.	39 38,74	— 0,91	+ 1,03 *δ*
	4.	52 18,92	— 1,14	— 0,84 *d′*
	5.	65 16,03	— 1,06	+ 0,38
	6.	78 30,31	— 0,97	
	7.	92 0,94	— 0,79	
	8.	105 46,13	— 0,45	
	9.	119 43,30	— 0,15	
	10.	133 49,42	+ 0,10	
	11.	148 1,31	+ 0,29	
	12.	162 15,89	+ 0,26	
	13.	176 30,37	— 0,91	— 30,82
	14.	190 42,22	+ 4,52	+ 61,66 *d*
	15.	204 48,00	— 6,53	— 77,14 *δ*
	16.	218 48,79	+ 4,52	+ 61,78 *d′*
	17.	232 39,14	— 0,89	— 31,25
	18.	246 18,12	+ 0,46	
	19.	259 43,91	+ 0,54	
	20.	272 55,15	+ 0,76	
	21.	285 51,02	+ 0,88	

54. A l'inspection des quatrièmes différences, on remarque d'abord qu'elles se suivent assez régulièrement jusqu'à celles qui répondent aux 2 et 3 juin, qui sont l'une et l'autre — 0,91 ; néanmoins ceci ne dérangerait pas l'uniformité, si cette différence étant regardée comme le *maximum*, les suivantes commençaient à diminuer. Mais comme la différence correspondante au 4 juin est — 1,14, c'est un indice qu'il s'y trouve une erreur, quoique petite, et que, par cela même, on ne peut ni l'appercevoir par

la méthode précédente, ni déterminer la fonction à laquelle elle appartient (n° 50). On pourrait donc négliger cette erreur, ainsi que toutes les autres qui donneraient des inégalités aussi petites dans les différences.

55. Mais en passant aux huitièmes différences, nous trouvons pour le 3 juin la différence + 1′,03, et pour le 2 et le 4, les différences égales — 0,84; ce qui est conforme aux conditions $d = d'' = -\frac{4}{5}\delta = -0{,}824$ (n° 33). On conclut de là, qu'il n'y a qu'une petite erreur $\frac{\delta}{70} = 0'{,}015$; qu'elle appartient à la longitude du 3 juin ; et que par conséquent cette longitude doit être 39° 38′,725 (n° 39). Si, pour juger de l'influence de cette petite erreur, l'on prenait de nouveau les quatrièmes différences, depuis le 1 jusqu'au 5 inclusivement, on trouverait — 0,665, — 0,850, — 1,000, — 1,080, — 1,075, qui sont d'une régularité remarquable.

56. Les cas où, comme dans celui-ci, on pourra déterminer avec autant de facilité et de précision une erreur aussi petite seront bien rares, parce que cela dépend de l'extrême exactitude des lieux qui l'avoisinent de part et d'autre; car s'il y avait aussi d'autres erreurs, quoique de même ordre, elles s'enchaîneraient tellement entre elles dans les différences, qu'il ne serait pas aussi facile de les découvrir, ni de les corriger avec autant de précision.

57. En poursuivant l'examen des quatrièmes différences, on remarquera une irrégularité beaucoup plus considérable depuis le 13 juin, parce que la différence — 0′,91 = Δ′, qui répond à ce jour, devrait être à-peu-près + 0′,20 = Δ, selon la marche des précédentes : d'où il s'ensuit que la première longitude inexacte est celle du 15, dont l'erreur est à-peu-près — 1,11 = Δ′ — Δ (n° 50). On voit pareillement que cette irrégularité finit au 17, dont la différence correspondante est — 0′,89 = Δ′, et par la marche des différences suivantes, elle devrait être peu différente de + 0′,30 = Δ ; d'où l'on tire que la dernière longitude inexacte est aussi celle du 15, et que l'erreur est à-peu-près — 1′,19 = Δ′ — Δ.

58. Passant ensuite aux huitièmes différences, nous trouvons que celles qui correspondent aux jours 14, 15, 16, sont + 61′,66 = d, — 77′,14 = δ, + 61′,78 = d'', qui satisfont, à très-peu de chose

près, aux conditions $d = d' = -\frac{1}{5}\delta = +61',712$ (n° 33); et par conséquent l'erreur de la longitude du 15, sera $\frac{\delta}{70} = -1',102$, et partant cette longitude sera 204° 49′,10 (n° 39).

59. *Exemple II.* Prenons les latitudes de la Lune calculées pour la fin de juin et le commencement de juillet 1807.

	Jours.	*Lat.* ☾	*Diff. 4ièmes*	*Diff. 8ièmes*
Juin	25.	+ 5° 13′,07	+ 0′,31	
	26.	5 11,15	+ 0,21	
	27.	4 55,92	+ 0,24	+ 0′,61
	28.	4 27,92	+ 0,22	— 1,36 d
	29.	3 48,05	+ 0,58	+ 2,21 δ
	30.	2 57,25	+ 0,39	— 2,73 δ'
Juillet	1.	1 57,16	+ 0,93	+ 2,35 δ''
	2.	+ 0 49,78	+ 0,75	— 1,41 d'
	3.	— 0 21,96	+ 0,75	+ 0,50
	4.	1 34,38	+ 0,42	
	5.	2 43,05	— 0,25	
	6.	3 43,12	— 0,85	
	7.	4 29,99	— 2,22	— 18,12
	8.	4 59,91	+ 0,83	+ 27,35 d
	9.	5 11,35	— 4,03	— 21,93 δ
	10.	5 1,95	— 1,78	+ 2,40 δ'
	11.	4 33,38	+ 0,67	+ 11,67 d'
	12.	3 49,09	— 1,19	— 10,78
	13.	2 51,86	— 0,20	
	14.	1 45,66	+ 0,02	
	15.	— 0 34,66	+ 0,30	

60. Dans cet exemple, on observe d'abord une petite irrégularité dans les quatrièmes différences, lesquelles croissant et décroissant alternativement, indiquent quelques erreurs, fort petites à la vérité, mais qui par cela même échappent à la recherche préalable faite au moyen des quatrièmes différences (n° 50). Mais en calculant les huitièmes, on voit que la supposition d'erreur dans les seules latitudes correspondantes aux différences marquées δ, δ', δ'', se confirme suffisamment par la valeur de $d = -1',23$, et plus encore par celle de $d' = -1',39$ (n° 35). Ainsi, d'après

les formules de ce numéro, on aura $x = +0',01$, $x' = -0',02$, $x'' = +0',01$. Ces erreurs sont telles, que si on corrige d'abord les latitudes correspondantes, et qu'on en cherche de nouveau les quatrièmes différences entre les limites de leur influence, c'est-à-dire, depuis le 22 juin jusqu'au 3 juillet inclusivement, on trouvera 0,23, 0,28, 0,43, 0,59, 0,78, 0,81, 0,74; et on ne retrouve plus dans ces différences l'irrégularité des premières.

61. On apperçoit bientôt après une autre irrégularité plus considérable, à commencer de la différence qui répond au 7 juillet, où l'on trouve $-2',22 = \Delta'$, au lieu que, d'après la marche des différences précédentes, elle devrait être à-peu-près $-1',45 = \Delta$; la première latitude inexacte sera donc celle du 9, et l'erreur sera à-peu-près $-0',77 = \Delta' - \Delta$ (n° 51). Un semblable examen fait voir que l'irrégularité finit à la différence correspondante au 12 juillet, où l'on trouve $-1',19 = \Delta'$, et qui, selon la marche des suivantes, devrait être $-0',46 = \Delta$ à-peu-près : la dernière des latitudes inexactes est donc celle du 10, et sa correction diffère peu de $-0',73 = \Delta' - \Delta$.

62. En passant maintenant aux huitièmes différences, et désignant par δ et δ' celles qui répondent aux jours 9 et 10, nous trouvons que la supposition précédente est confirmée par les équations de condition du n° 34, qui donnent $d = +27',64$ et $d' = +11',42$. Les deux corrections seront donc $x = -0',80$, $x' = -0',60$, et par conséquent la latitude du $9 = -5° 10',55$, et celle du $10 = -5° 1',35$ (n° 39).

63. Il est bon de remarquer, que si, en négligeant l'examen préalable des quatrièmes différences, on eût voulu tenter tout de suite la supposition de deux latitudes inexactes, d'après l'inspection des huitièmes différences, on aurait choisi naturellement les deux plus grandes qui correspondent au 8 et au 9 juillet, et l'on aurait fait $d = -18',12$, $\delta = +27',35$, $\delta' = -21',93$, $d' = +2',40$. Mais cette supposition serait bientôt rejetée par les équations de condition qui, dans ce cas, donneraient $d = -21',85$ et $d' = 11',01$. On essaierait de même les autres différences, premièrement deux à deux, puis trois à trois, et ainsi de suite, jusqu'à trouver une supposition qui s'accordât, à peu de chose près, avec les équations

de condition. Heureusement que ce travail n'est nécessaire que quand il s'agit de très-petites erreurs, que d'ailleurs on peut négliger sans inconvénient. Quant à celles qui sont un peu considérables, l'examen préliminaire des quatrièmes différences ne manquera pas d'être confirmé, le plus souvent, par les équations de condition.

64. *Exemple III.* Supposons enfin qu'on a calculé, pour le mois d'août 1807, les longitudes suivantes.

Jours.	*Long.* ☾	*Diff.* 4èmes	☾	*Diff.* 4èmes	*Diff.* 8èmes
1.	95° 15,00	— 3,04	95 15,00	— 3,04	
2.	109 21,03	— 2,85	109 21,03	— 2,85	
3.	123 51,09	— 2,56	123 51,09	— 2,56	
4.	138 39,32	— 1,04	138 39,32	— 1,04	
5.	153 37,30	— 1,47	153 37,30	— 1,47	
6.	168 53,57	+ 9,74	168 34,57	+ 9,74	+ 100,65 *d*
7.	183 23,20	— 7,29	183 23,20	— 7,29	— 118,85 *δ*
8.	197 59,00	+ 8,21	197 59,00	+ 8,21	+ 102,75 δ'
9.	212 14,49	— 1,84	212 14,49	— 1,84	— 83,89 δ''
10.	226 9,40	+ 4,73	226 9,40	+ 7,23	+ 75,34 δ'''
11.	239 41,62	+ 6,20	239 41,62	— 3,80	
12.	252 53,77	— 12,81	252 56,27	+ 1,19	
13.	265 54,67	+ 3,99	265 54,67	— 2,01	
14.	278 40,33	+ 10,07	278 39,33	+ 6,57	
15.	291 10,75	— 13,15	291 10,75	— 9,15	+ 56,46 *δ*
16.	303 36,00	— 1,67	303 36,00	— 2,67	— 54,83 δ'
17.	315 53,00	+ 16,05	315 53,00	+ 16,05	+ 181,03 δ''
18.	327 57,00	— 17,78	327 57,00	— 17,78	— 226,17 δ'''
19.	339 59,30	+ 12,08	339 59,30	+ 12,08	+ 178,69 δ^{IV}
20.	351 53,42	— 4,30	351 53,42	— 4,30	— 98,53 *d'*
21.	3 44,96	+ 1,84	3 44,96	+ 1,84	
22.	15 35,22	+ 0,73	15 35,22	+ 0,73	
23.	27 27,34	+ 0,64	27 27,34	+ 0,64	
24.	39 25,19	+ 0,46	39 25,19	+ 0,46	

65. On voit par les quatrièmes différences, qu'une irrégularité très-remarquable commence depuis le 5, parce que, selon la marche des deux précédentes, au lieu de $-1',47 = \Delta'$, on devrait trouver, pour le moins, $+0,52 = \Delta$: d'où il s'ensuit que la première longitude inexacte est celle du 7, et que l'erreur est $-1,99 = \Delta' - \Delta$ (n° 50). Cette irrégularité continue visiblement sans interruption

jusqu'au 21, et ce n'est que dans les jours suivans que les différences ont une marche régulière, d'après laquelle, la différence correspondante au 21 ne saurait être plus grande que $+ 0',84 = \Delta$, au lieu de $+ 1',84 = \Delta'$. On conclut de là, que la dernière des longitudes inexactes est celle du 19, et que sa correction est $\Delta' - \Delta = + 1',00$. Nous avons donc ainsi treize longitudes, ou toutes inexactes, ou dont quelques-unes intermédiaires, quoiqu'exactes, ne peuvent cependant être déterminées qu'avec les autres. Ce cas exigerait des formules trop compliquées, qui néanmoins ne donneraient pas une très-grande exactitude dans la pratique, comme nous l'avons remarqué (n° 30).

66. Le seul expédient en de pareils cas, qui ne peuvent arriver que par une extrême négligence de la part du calculateur, est de refaire le calcul une première et une seconde fois, avec toute l'attention possible pour autant de lieux qu'il sera nécessaire, afin que ceux qui restent soient dans le cas des problèmes précédens. Ainsi, par exemple, pour six lieux inexacts, il suffit de rectifier par les tables le calcul du premier, ou du dernier; pour sept, il ne faut que rectifier les deux extrêmes, ou les deux premiers, ou bien les deux derniers; pour huit, les trois premiers, ou les trois derniers, ou bien, deux à l'une des extrémités, et un à l'autre; pour neuf, où il est nécessaire de rectifier quatre lieux, il vaut mieux prendre ceux du milieu de la série, et il en restera trois d'un côté et deux de l'autre. Ainsi, dans l'exemple présent, on en laissera cinq d'un côté et quatre de l'autre, et l'on rectifiera par les tables les quatre intermédiaires.

67. Cela est suffisant, parce que l'erreur du dernier des lieux qui précèdent n'influe point dans la différence correspondante au premier de ceux qui suivent, ni l'erreur de celui-ci dans la différence correspondante à celui-là. Ces erreurs influent cependant réciproquement sur les différences correspondantes aux lieux adjacens, et il n'y aura pour les premiers que la condition de d, et pour les seconds que celle de d'. Ces conditions sont aussi les seules nécessaires en pareil cas, parce qu'on peut regarder comme exacts les quatre lieux qui ont été calculés avec

Digitized by Google

toute l'attention possible, et par conséquent on n'aura pas besoin de vérifier les autres pour ce qui regarde leurs combinaisons avec ceux-ci.

68. En vérifiant donc, dans l'exemple proposé, les longitudes des jours 11, 12, 13, 14, nous retrouverons que celles du 11 et du 13 sont exactes, et qu'à la place des seules inexactes correspondantes aux 12 et 14, on doit mettre 252° 56′,27 et 278° 39′,33. En prenant d'abord avec ces lieux corrigés les quatrièmes différences jusqu'à ceux ou leurs erreurs peuvent influer, c'est-à-dire, depuis le 10 jusqu'au 16 inclusivement, on passera ensuite aux huitièmes différences correspondantes aux jours 7, 8, 9, 10; et l'on sera dans le cas du problème de quatre fonctions inexactes. En prenant de même les huitièmes différences correspondantes aux jours 15, 16, 17, 18, 19, on aura le cas de cinq fonctions inexactes.

69. Quant au premier, nous trouverons par l'équation de condition (n° 36) $d = 99',70$, qui ne diffère que de 0′,95 de la véritable; d'ailleurs, c'est plutôt au rapport de ces deux valeurs qu'à leur différence qu'on doit faire attention, et il est évident qu'il suffirait d'une erreur de +0′,0136 dans la longitude du jour 6 pour produire celle-ci. Il en serait de même, si dans les lieux précédens les erreurs croissaient de jour en jour jusqu'au 2, dont la longitude aurait dû avoir l'erreur +0′,95, pour qu'il en résultât une pareille dans la différence du 6. Mais ces erreurs plus considérables, auraient été découvertes par les différences précédentes. Ainsi, les quatre erreurs, en commençant par celle du 7, seront $x = -2',07$, $x' = -0',61$, $x'' = +0',02$, $x''' = +1',10$.

70. Pour le second problème, nous aurons (n° 37) $d' = -98',61$, plus approchant de la vérité, qu'on aura souvent lieu de le trouver dans la pratique; et les cinq erreurs, en commençant par celle du 15, seront comme il suit, $x = -1',69$, $x' = +0',28$, $x'' = +2',55$, $x''' = -0',62$, $x^{IV} = +1',09$: avec toutes les neuf on corrigera les longitudes, selon ce qui a été dit (n° 39).

71. Il est bon d'observer aussi qu'il convient de ne pas négliger

dans ce calcul les millièmes de minute, non-seulement pour représenter plus exactement les lieux calculés tels qu'on les a trouvés, exacts ou inexacts, mais encore, afin que les erreurs cherchées soient plus exactes dans les centièmes, auxquels on a égard dans les calculs des éphémérides.

§ V.

Règle d'interpolation.

72. Après qu'on a vérifié les lieux de la Lune calculés pour les midis, il nous reste à faire voir comment on en déduit les lieux de minuit avec leurs nombres subsidiaires A et B, qui servent à trouver ces lieux pour tout autre instant donné, ou réciproquement. Pour cela, on partage les lieux de midi en groupes de sept, de manière pourtant, que le dernier lieu d'un de ces groupes soit aussi le premier du groupe suivant. Prenant ensuite les différences à la manière ordinaire, on fait époque dans le lieu moyen, et l'on emploie les différences paires correspondantes à chaque lieu, et la somme des différences impaires correspondantes aux deux intervalles adjacens.

73. En faisant donc

$$\frac{diff.\ 2^{me}}{4} = \alpha, \qquad \frac{diff.\ 4^{me}}{4.6.8} = \beta, \qquad \frac{diff.\ 6^{me}}{6.6.8.8.10} = \gamma,$$

$$\frac{som.\ des\ 1^{ers}}{2} = a, \qquad \frac{som.\ des\ 3^{mes}}{6.8.} = b, \qquad \frac{som.\ des\ 5^{mes}}{6.8.8.10} = c,$$

et désignant par L la longitude ou la latitude de la Lune correspondante à l'époque, par $\mathbb{C}$ la longitude ou la latitude cherchée correspondante à l'un quelconque des minuits intermédiaires, et par A le nombre subsidiaire qui, dans les éphémérides, doit accompagner chacune de ces fonctions, on aura les formules suivantes.

Digitized by Google

Pour les deux premiers minuits, celui qui précéde et celui qui suit immédiatement l'époque,

74. $$\mathbb{C} = L + \tfrac{1}{2}(\alpha - 3\mathfrak{C} + 45\gamma) \pm \tfrac{1}{2}(a - 3b + 45c)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a - b + 9c) \pm \tfrac{1}{2.6}(\alpha - 2\mathfrak{C} + 27\gamma).$$

Pour les deux seconds par rapport à l'époque,

75. $$\mathbb{C} = L + \tfrac{9}{2}(\alpha + 5\mathfrak{C} - 35\gamma) \pm \tfrac{3}{2}(a + 5b - 35c)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a + 23b - 71c) \pm \tfrac{1}{4}(\alpha + 14\mathfrak{C} - 53\gamma).$$

Pour le premier et le dernier,

76. $$\mathbb{C} = L + \tfrac{25}{2}(\alpha + 21\mathfrak{C} + 189\gamma) \pm \tfrac{5}{2}(a + 21b + 189c)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a + 71b + 1689c) \pm \tfrac{5}{2.6}(\alpha + 46\mathfrak{C} + 939\gamma).$$

77. Quant aux valeurs de A correspondantes au midi de l'époque et aux premiers, seconds et troisièmes de ceux qui la suivent et qui la précèdent, on aura suivant le même ordre

$$A = \tfrac{1}{4.6}(a - 4b + 64c)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a + 8b - 96c) \pm \tfrac{1}{6}(\alpha + 4\mathfrak{C} - 48\gamma)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a + 44b + 384c) \pm \tfrac{1}{3}(\alpha + 28\mathfrak{C} + 192\gamma)$$
$$A = \tfrac{1}{4.6}(a + 104b + 4384c) \pm \tfrac{1}{2}(\alpha + 68\mathfrak{C} + 2512\gamma).$$

Le signe — appartient aux midis qui précèdent l'époque, et le signe + à ceux qui la suivent, quel que soit d'ailleurs le signe propre à la quantité qui est sous les parenthèses.

78. Pour ce qui regarde enfin les nombres subsidiaires B des éphémérides: soient B, B', B'', etc. ceux qui doivent correspondre successivement à A, A', A'', A''', etc. trouvés déjà de 12 en 12 heures, nous aurons

$$B = \frac{A' - A}{4.6}, \quad B' = \frac{A'' - A'}{4.6}, \quad B'' = \frac{A''' - A''}{4.6}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Exemple I.

79. Supposons qu'on ait calculé les longitudes de la Lune pour les sept premiers jours de juin 1807, et qu'on en prenne les différences ainsi qu'il suit

Jours.	*Long.* ☾.	*diff.* 1ères.	2èmes.	3èmes.	4èmes.	5èmes.	6èmes.
1.	15° 2′,74						
		12° 11′,37					
2.	27 14,11		+ 13′,25				
		12 24,63		+ 2′,32			
3.	39 38,74		+ 15,56		− 0′,97		
		12 40,19		+ 1,35		− 0′,13	
4.	L 52 18,92		+ 16,92		− 1,10		+ 0′,16.
		12 57,11		+ 0,25		+ 0,03	
5.	65 16,03		+ 17,17		− 1,07		
		13 14,28		− 0,82			
6.	78 30,31		+ 16,35				
		13 30,63					
7.	92 0,94						

On voit par ce Tableau que les différences paires dont il faut se servir sont + 16′,92, — 1′,10, +0′,16, et que les impaires sont celles marquées par des crochets: on aura donc (n° 73)

$$\alpha = +\,4',23, \quad 6 = -\,0',00573, \quad \gamma = +\,0',000007$$
$$a = 12°\,48,65, \quad b = +\,0,03333, \quad c = -\,0,000026.$$

80. En substituant ces valeurs numériques dans les formules (n° 74 et suiv.), on aura, suivant le même ordre,

$$\begin{cases} \mathbb{C} = 52° 18',92 + 2',124 \pm 6° 24',274 \\ A = 32',0257 \pm 0',3535 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathbb{C} = 52° 18',92 + 18',905 \pm 19° 13',226 \\ A = 32',0591 \pm 1',0373 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathbb{C} = 52° 18',92 + 51',387 \pm 32° 3',362 \\ A = 32',1239 \pm 1',655 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = 32',0210 \\ A = 32,0383 \pm 0',7011 \\ A = 32,0878 \pm 1,3570 \\ A = 32,1667 \pm 1,9288. \end{cases}$$

81. Séparant maintenant et ordonnant les deux valeurs de chaque article, nous aurons les valeurs successives de A,

A....30′,238... 30′,468... 30′,731... 31′,022... etc.

les valeurs correspondantes de B (n° 38) seront

B.....9,6..... 10,9..... 12,1..... 13,1... etc.

et l'on aura ainsi dans le Tableau suivant, tout ce qui regarde les longitudes de la Lune pour les six premiers jours de juin :

	0h			12h		
Jours.	*Longit.*	*A*	*B*	*Longit.*	*A*	*B*
1.	15° 2′,74	30′,238	+ 9,6	21° 6′,94	30′,468	+ 10,9
2.	27 14,11	30,731	12,1	33 24,60	31,022	13,1
3.	39 38,73	31,337	13,9	45 56,77	31,672	14,5
4.	52 18,92	32,021	15,1	58 45,32	32,383	14,8
5.	65 16,03	32,739	14,9	71 51,05	33,096	14,7
6.	78 30,31	33,445	13,8	85 13,67	33,779	13,2
7.	92 0,94	34,096				

Exemple II.

82. Supposons que l'on veuille aussi interpoler les latitudes calculées pour les mêmes jours. On prendra d'abord les différences comme il suit :

Jours.	*Latit.*	*Diff.* 1ères.	2èmes.	3èmes.	4èmes.	5èmes.	6èmes.
1.	+ 4° 18,91						
		− 44′,37					
2.	3 34,54		− 10′,80				
		− 55,17		+ 1′,90			
3.	2 39,37		− 8,90		+ 0′,73		
		− 64,07		+ 2,63		+ 0′,07	
4.	*L* 1 35,30		− 6,27		+ 0,80		− 0′,24
		− 70,34		+ 3,43		− 0,17	
5.	+ 0 24,96		− 2,84		+ 0,63		
		− 73,18		+ 4,06			
6.	− 0 48,22		+ 1,22				
		− 71,96					
7.	2 0,18						

et l'on en tirera (n° 73)

$$\alpha = -\ 1'{,}5675, \quad \mathfrak{C} = +\ 0'{,}004167, \quad \gamma = -\ 0'{,}0000104$$
$$a = -\ 67{,}205, \quad b = +\ 0{,}12625, \quad c = -\ 0{,}000026.$$

83. Ensuite substituant dans les formules (n° 74 et suiv.), nous trouverons les résultats suivans

$$\begin{cases} \mathbb{C} = +\ 1^\circ\ 35{,}30 - 0'{,}790 \pm (-\ 35'{,}792) \\ A = -\ 2'{,}8055 \pm (-\ 0'{,}1513) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{C} = +\ 1^\circ\ 35'{,}30 - 6'{,}958 \pm (-\ 1^\circ\ 39{,}859) \\ A = -\ 2'{,}6792 \pm (-\ 0'{,}3772) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{C} = +\ 1^\circ\ 35{,}30 - 18'{,}524 \pm (-\ 2^\circ\ 41'{,}397) \\ A = -\ 2'{,}4286 \pm (-\ 0{,}5773) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\ 2'{,}821 \\ A = -\ 2{,}7580 \pm (-\ 0'{,}2584) \\ A = -\ 2{,}5692 \pm (-\ 0{,}4843) \\ A = -\ 2{,}2579 \pm (-\ 0{,}6551). \end{cases}$$

84. En suivant enfin, pour tout le reste, la même marche que dans l'exemple précédent, on aura pareillement pour les latitudes le Tableau suivant :

	0ʰ			12ʰ		
Jours.	*Latit.*	*A*	*B*	*Latit.*	*A*	*B*
1.	+ 4° 18′,91	− 1′,603	− 10,3	+ 3° 58′,17	+ 1′,851	− 9,7
2.	3 34,54	2,085	9,0	3 8,20	2,302	8,2
3.	2 39,37	2,500	7,2	2 8,30	2,674	6,1
4.	1 35,30	2,821	4,8	+ 1 0,72	2,937	− 3,3
5.	+ 0 24,96	3,017	− 1,7	− 0 11,52	3,057	+ 0,1
6.	− 0 48,22	3,054	+ 2,4	1 24,62	3,006	3,9
7.	2 0,18	2,913				

85. Comme pour l'enchaînement de l'interpolation il faut que le septième lieu de chaque opération soit aussi le premier de l'opération suivante, on trouvera pour ce lieu deux valeurs

de A, dont la coïncidence exacte ou approchée servira de preuve pour l'exactitude des opérations. Si elles ne diffèrent que de quelques unités dans les millièmes, on en prendra le moyen arithmétique ; mais si leur différence est plus considérable, c'est un indice qu'on s'est trompé, ou sur le calcul particulier du même nombre A, ou sur ceux de α, ζ, etc., qui entrent dans les calculs de tous les autres articles de l'opération. Dans le premier exemple (n° 81), on trouverait pour la seconde valeur de A, 34′,094, et la moyenne des deux est 34′,095 ; dans le second (n° 84), on trouverait la seconde valeur de $A = -2'{,}914$, qui est aussi admissible que la première $-2'{,}913$, parce que la moyenne arithmétique $-2'{,}9135$ exigerait une figure décimale de plus.

VI.

Démonstration de la règle précédente.

86. Il n'y a de nouveau dans cette règle que la disposition symmétrique des termes, d'où il résulte une très-grande facilité pour la pratique, outre l'avantage de trouver deux à deux tous les articles que l'on cherche, avec les mêmes nombres, ainsi qu'on vient de le voir dans les exemples précédens.

87. Supposons donc sept fonctions, ou sept lieux calculés de la Lune H, I, K, L, M, N, O, correspondans aux temps ou racines 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prenons, pour l'époque des fonctions et des temps, les termes du milieu de ces suites, et elles se changeront en

$-3.$	$-2.$	$-1.$	0.	$+1.$	$+2.$	$+3.$
$H-L.$	$I-L.$	$K-L.$	0.	$M-L.$	$N-L.$	$O-L.$

Il s'agit de déterminer la fonction $\mathbb{C}-L$ correspondante à un temps quelconque x compté depuis l'époque, $\mathbb{C}$ désignant le lieu de la lune à cet instant ; ce lieu sera déterminé par l'équation

$$\mathbb{C} = L + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6,$$

dès que les coefficiens A, B, C, etc. seront connus.

88. Pour cela, prenons les différences successives des fonctions proposées, et supposons

$$\begin{array}{llllll}
I-H=p & & & & & \\
K-I=p' & p'-p=q & & & & \\
L-K=p'' & p''-p'=q' & q'-q=r & & & \\
M-L=p''' & p'''-p''=q'' & q''-q'=r' & r'-r=s & & \\
N-M=p^{IV} & p^{IV}-p'''=q''' & q'''-q''=r'' & r''-r'=s' & s'-s=t & \\
O-N=p^{V} & p^{V}-p^{IV}=q^{IV} & q^{IV}-q'''=r''' & r'''-r''=s'' & s''-s'=t' & t'-t=u.
\end{array}$$

Quoique les fonctions $H-L$, $I-L$, etc. puissent être représentées par ces différences, de plusieurs manières différentes, dont les unes pourront conduire à des résultats plus élégans que les autres; nous n'avons d'autre but ici, que de faire dépendre la détermination de ces fonctions, des seules différences paires correspondantes à l'époque, et des sommes des différences impaires correspondantes aux deux intervalles adjacens, parce que la moitié de chacune de ces sommes peut être regardée comme correspondante à l'époque même. Ainsi, au moyen de substitutions convenables, on aura

$$\begin{array}{l}
H-L=-3p''+6q''-4r'+s'-t \\
I-L=-2p''+3q''-r'. \\
K-L=-p''+q'' \\
M-L=p'' \\
N-L=2p''+q''+r'' \\
O-L=3p''+3q''+4r''+s'+t'.
\end{array}$$

89. En substituant dans l'équation générale (n° 87) les valeurs successives de $\mathbb{C}=H, =I, =K$, etc., et de $x=-3, =-2$, etc., on aura pour la détermination des coefficiens A, B, C, etc. les six équations suivantes

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-3A+9B-27C+81D-243E+729F & = & -3p''+6q''-4r'+s'-t \\
-2A+4B-8C+16D-32E+64F & = & -2p''+3q''-r' \\
-A+B-C+D-E+F & = & -p''+q'' \\
A+B+C+D+E+F & = & p'' \\
2A+4B+8C+16D+32E+64F & = & 2p''+q''+r'' \\
3A+9B+27C+81D+243E+729F & = & 3p''+3q''+4r''+s'-t'.
\end{array}$$

Digitized by Google

90. En prenant la somme et la différence des équations, qui ont deux à deux les mêmes coefficiens numériques dans le premier membre, on aura les six équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} &B+ D+ F=\tfrac{1}{2}q'' \\ &B+4D+16F=\tfrac{1}{2}q''+\tfrac{1}{8}s' \\ &B+9D+81F=\tfrac{1}{2}q''+\tfrac{1}{3}s'+\tfrac{1}{18}u \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &A+ C+ E=\tfrac{1}{2}(p''+p''') \\ &A+4C+16E=\tfrac{1}{2}(p''+p''')+\tfrac{1}{4}(r'+r'') \\ &A+9C+81E=\tfrac{1}{2}(p''+p''')+\tfrac{3}{3}(r'+r'')+\tfrac{1}{6}(t+t') \end{aligned}\right\},$$

où il faut remarquer qu'on a substitué dans les trois premières s', u' à la place de $r''-r$, $t'-t$, et que dans les trois secondes on a mis q'' au lieu de $p''-p'$.

91. Faisant donc, pour abréger, comme ci-dessus (n° 73),

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=\frac{q''}{4}, \quad \mathfrak{G}=\frac{s'}{4.6.8}, \quad \gamma=\frac{u}{6.6.8.8.10}, \\ &a=\frac{p''+p'''}{2}, \quad b=\frac{r'+r''}{6.8}, \quad c=\frac{t+t'}{6.8.8.10}, \end{aligned}\right\}$$

nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} F &= 32\gamma \\ D &= 8\mathfrak{G}-160\gamma \\ B &= 2\alpha-8\mathfrak{G}+128\gamma \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} E &= 16c \\ C &= 4b-80c \\ A &= a-4b+64c \end{aligned}\right\}.$$

Substituant maintenant ces valeurs dans l'équation générale (n° 87), il viendra

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = L &+ 2x^2\left(\alpha+4\mathfrak{G}(x^2-1)+16\gamma(x^2-1)(x^2-4)\right) \\ &+ x\left(a+4b(x^2-1)+16c(x^2-1)(x^2-4)\right). \end{aligned}$$

Si l'on substitue successivement dans cette équation $x=\pm\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{3}{2}$, $x=\pm\frac{5}{2}$, on aura les formules particulières à ces différens cas, exposées dans les n°s 74, 75, 76.

92. En différentiant l'équation précédente, nous aurons aussi, après les réductions ordinaires,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{C}}{dx} = a &+ 4b(3x^2-1)+16c(5x^4-15x^2+4) \\ &+ 4x\left(\alpha+4\mathfrak{G}(2x^2-1)+16\gamma(3x^4-10x^2+4)\right). \end{aligned}$$

$\frac{d\mathbb{C}}{dt}$ est la vitesse de la Lune dans l'instant x, représentée par l'espace qu'elle décrirait uniformément dans l'unité de temps, ou dans un jour moyen ; si l'on veut cette vitesse pour une heure, ce que l'on désigne par A dans les Éphémérides, nous aurons

$$A = \frac{1}{4.6}\left(a + 4b(3x^2 - 1) + 16c(5x^4 - 15x^2 + 4\right)$$
$$+ \frac{1}{6}x\left(\alpha + 4\mathfrak{C}(3x^2 - 1) + 16\gamma(3x^4 - 10x^2 + 4)\right).$$

En substituant, dans cette équation, $x = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{3}{2}$, $x = \pm\frac{5}{2}$, on aura les formules respectives à ces cas (n°s 74, 75, 76) ; et par la substitution de $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$, on aura pareillement celles qu'on a vues (n° 77).

93. Ayant donc ainsi obtenu les lieux de la Lune avec les mouvemens horaires respectifs de 12 en 12 heures, on peut supposer que le mouvement de cet astre, que nous désignons par $\mathbb{C}'$, pendant une partie quelconque t de cet intervalle, est assez exactement représenté par la formule $\mathbb{C}' = At + Bt^2$, B étant le nombre subsidiaire qui doit accompagner A dans les Éphémérides ; nous aurons donc la vîtesse de la Lune pour un instant quelconque du même intervalle $\frac{d\mathbb{C}'}{dt} = A + 2Bt$; cette vîtesse devient $= A$ lorsque $t = 0$, comme cela doit être. Mais en nommant A' celle qui doit avoir lieu 12^h après, on aura $A' = A + 24B$, et par conséquent $B = \frac{A' - A}{4.6}$, etc. (n° 78).

94. Observons de plus, qu'en mettant $t = 12$ dans la formule $\mathbb{C}' = At + Bt^2$, $\mathbb{C}'$ représentera le mouvement de la Lune, dans l'intervalle de 12 heures, donné par les Éphémérides ; et en faisant $\frac{\mathbb{C}'}{5.4} = \grave{A}$, nous aurons une autre valeur de $B = \frac{\grave{A} - A}{3.4}$, qui, quoique très-peu différente de la première, ne coïncidera avec elle que lorsque A, $\grave{A}$, A' seront en progression arithmétique ; parce que chacune de ces qnantités satisfait séparément à l'une des conditions auxquelles il fallait satisfaire. On voit par là qu'il serait plus exact de prendre la moyenne arithmétique.....

$B = \frac{2(\dot{A}-A)+(A'-A)}{6.8}$; mais la différence en est si petite, que ce n'est pas la peine d'employer trois fois plus de temps dans le calcul de cet article.

95. Si l'on desirait néanmoins une plus grande précision, il n'y aurait qu'à introduire un troisième nombre C, pour satisfaire à-la-fois aux deux conditions, et on aura, dans ce cas,

$$12B + 12.12C = \dot{A} - A$$
$$2.12B + 3.12.12C = A' - A;$$

d'où l'on tire

$$B = \frac{2(\dot{A}-A)-(A'-\ddot{A})}{3.4},$$

$$C = \frac{(A'-\dot{A})-(\ddot{A}-A)}{4.6.6}.$$

96. *Exemple.* On demande la latitude de la Lune pour le 4 juin 1807, à 6 heures. Nous aurons d'abord (n° 84) mouvement en $12^{h} = -34',58$, et par conséquent $\dot{A} = -2',882$, puis $A = -2',821$ et $A' = -2',937$; partant, $B = -5,58$ et $C = +0,04$ (*Voy.* Explic. des Éphém. Vol. I, n° 42). Ainsi la formule $\mathbb{C}' = t\left(A + t(B + Ct)\right)$ pour le temps proposé, c'est-à-dire, pour $t = 6$, donnera $\mathbb{C}' = -17',12$, et la latitude cherchée sera $= 1° 18',18$: par la règle des Éphémérides, on trouverait $1° 18',20$, différence $0',02 = 1'',2$. Pareillement, la formule $A + t(2B + 3Ct)$ donnera, pour le même instant, le mouvement horaire $-2',884$ qui, par la règle des Éphémérides, serait $-2',879$, différence $0'',3$.

97. Ces petites différences justifient très-bien la raison par laquelle, dans les Éphémérides, nous nous sommes contentés de l'équation dépendante du nombre B et du calcul qu'on y a prescrit: d'ailleurs cette exactitude n'est qu'hypothétique, puisqu'il ne s'agit ici que de trouver le lieu proposé d'après d'autres lieux calculés, et de la même manière qu'on le trouverait par les Tables; et l'erreur de celles-ci peut être beaucoup plus considérable que les petites différences que nous venons de voir. Si

l'on parvient un jour à avoir des Tables de la Lune assez correctes pour que les erreurs des lieux calculés d'après ces Tables, n'aillent point au-delà de 2 ou 3 secondes; alors, il sera bon d'ajouter aussi le nombre C dans les éphémérides. En attendant, l'usage de ce nombre se borne uniquement au cas où l'on veut comparer un lieu observé de la Lune, avec celui que donnent les Tables, afin d'en connaître l'erreur.

§ VII.

Autre Règle d'interpolation.

98. En observant que l'interpolation particulière pour chacun des intervalles de 12^h qu'on vient de voir (n° 95), peut s'étendre à ceux de 24^h (en conservant à peu près la même exactitude, même pour les ascensions droites et les déclinaisons de la Lune, dans lesquelles les variations sont plus considérables), nous allons en déduire une autre règle plus simple et plus expéditive pour la pratique de l'interpolation des Éphémérides. Cette règle consiste à chercher d'abord les nombres A pour tous les midis, et ensuite ceux qui répondent aux minuits.

99. On calculera les nombres A par les formules démontrées (n° 77), ou seulement par la première qui en est la plus simple, en ce qu'elle ne dépend que des différences impaires, que l'on peut obtenir indépendamment du calcul des différences paires. Mais pour cela, il faudra prendre successivement pour époque chacun des lieux calculés; ce qu'on fera de la manière suivante.

100. Ayant pris successivement les premières différences qu'on pourra regarder comme une nouvelle série de fonctions, on en déduira les secondes différences par cette règle connue, que la différence seconde correspondante à une fonction, est égale à la somme des fonctions adjacentes, moins le double de la même fonction; puis, en regardant la série des troisièmes différences comme une nouvelle série de fonctions, on en prendra, de la même manière les différences secondes, qui par conséquent seront

Digitized by Google

les différences cinquièmes des premières fonctions, et ainsi de suite. Après avoir ainsi déterminé les trois différences impaires correspondantes aux intervalles des fonctions proposées, pour en conclure la valeur de A correspondante à chacune de ces fonctions, on prendra les deux rangs des différences, correspondans aux intervalles adjacens à ladite fonction; et en faisant

$$\frac{\text{som. des } 1^{\text{ères}}}{2} = a, \quad \frac{\text{som. des } 3^{\text{èmes}}}{2.6} = b, \quad \frac{\text{som. des } 5^{\text{èmes}}}{60} = c,$$

on trouvera que la première formule du n° 77 devient dans ce cas

$$A = \frac{1}{4.6}(a - b + c).$$

101. En prenant pour exemple les mêmes lieux de la Lune proposés (n° 79), on aura

Jours.	*Longit.*	*Diff.* $1^{\text{ères}}$	$3^{\text{èmes}}$	$5^{\text{èmes}}$	A
.	. . . .				
1	15° 2,74	12° 1′,31	+ 3′,85	— 0′,18	
2	27 14,11	12 11,37	+ 3,19	— 0,21	30′,239
3	39 38,73	12 24,62	+ 2,32	— 0,10	30,730
4	52 18,92	12 40,19	+ 1,35	— 0,13	31,337
5	65 16,03	12 57,11	+ 0,25	+ 0,03	32,021
6	78 30,31	13 14,28	— 0,82	+ 0,10	32,739
7	92 0,94	13 30,63	— 1,79	+ 0,18	33,445
.	. . . . .	13 45,19	— 2,58	+ 0,34	34,095

Ces résultats sont, à très-peu de différence près, les mêmes que nous avons trouvés par la méthode précédente (n° 81). Les derniers sont cependant préférables aux autres, en raison de ce qu'on y a pris successivement pour époque, chacun des lieux calculés de la Lune.

102. Il est vrai que l'usage de cette règle exige qu'indépendamment de la série de lieux calculés dont on se propose de trouver tous les A correspondans, on ait aussi les trois lieux qui précèdent le premier et les trois qui suivent le dernier : mais le calcul de ces derniers lieux est indispensable pour la continuation des Éphémérides; et les premiers sont toujours donnés, excepté le premier commencement, ou dans le cas qu'on voulût passer à l'emploi de

Digitized by Google

tables nouvelles. Il ne faut pas alors calculer ces lieux par les tables; mais, pour cette seule fois, on emploiera les formules de la première méthode (n° 77).

103. Les nombres A correspondans aux lieux de la Lune à midi étant ainsi déterminés, il s'agit maintenant de déterminer les lieux de minuit, et les nombres A qui leur correspondent. Pour cela, désignons par $\mathbb{C}$ le lieu de la Lune à midi d'un jour quelconque et par A le nombre subsidiaire correspondant; $\mathbb{C}''$, A'' désigneront les mêmes nombres pour le midi suivant; et $\mathbb{C}'$, A' pour le minuit intermédiaire. D'après ces dénominations et en observant qu'il s'agit ici d'un intervalle double de celui qu'on a supposé (n° 95), il est aisé de voir qu'on aura

$$B = \frac{2(\dot{A} - A) - (A'' - \dot{A})}{4.6}$$

$$C = \frac{(A'' - \dot{A}) - (\dot{A} - A)}{4.4.6.6}.$$

104. Puisqu'il s'agit du cas de $t = 12$, en substituant cette valeur de t et celles de B et de C qu'on vient de trouver, dans les deux formules $At + Bt^2 + Ct^3$, et $A + 2Bt + 3Ct^2$; réduisant et mettant à la place de $\dot{A}$ sa valeur $\frac{\mathbb{C}'' - \mathbb{C}}{24}$, on aura

$$\mathbb{C}' = \mathbb{C} + \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}) - 3(A'' - A)$$

$$A' = \frac{\frac{1}{2}(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}) - (A + A'')}{4}.$$

105. *Exemple.* Ayant calculé les longitudes de la Lune avec leurs nombres correspondans A (n° 101) pour les premiers jours de juin, on demande la longitude et le nombre A qui correspondent à minuit du premier jour.

On a $\mathbb{C} = 15^\circ\ 2',74$, $\mathbb{C}'' - \mathbb{C} = 12^\circ\ 11',37$, $A = 30',239$, $A'' = 30',730$; d'où l'on conclut $\mathbb{C}' = 21^\circ\ 6',95$, et $A' = 30',468$. En continuant les mêmes calculs pour les jours suivans, on trouvera ces résultats :

Digitized by Google

Jours.	12ʰ	
	Longit.	*A*
1.	21° 6′,95	30′,468
2.	33 24 ,60	31 ,022
3.	45 56 ,77	31 ,672
4.	58 45 ,32	32 ,379
5.	71 51 ,05	33 ,096
6.	85 13 ,67	33 ,779

Ces nombres, le premier excepté, sont identiquement les mêmes qu'on avait trouvés (n° 81), par la première règle. Cette exception même n'aurait pas lieu, si l'on eût pris 21° 6′,95 au lieu de 21° 6′,94, puisque d'après les nombres précédemment calculés (n° 80), il résulte 21° 6′,945.

106. Pour ce qui regarde les ascensions droites et les déclinaisons, on pourrait suivre les méthodes précédentes et les calculer seulement pour midi; mais parce que les variations en sont plus considérables, les résultats ne seront pas aussi exacts que pour les longitudes et les latitudes; et cela, soit qu'on emploie les formules de la règle précédente (n° 104), soit qu'on fasse usage de celles de la première règle (n° 74 et suiv.), lesquelles, dans ce cas, devraient s'étendre jusqu'aux huitièmes différences. Afin d'éviter ces inconvéniens, nous calculerons directement les ascensions droites et les déclinaisons pour midi et pour minuit; les intervalles étant ainsi plus rapprochés, nous trouverons avec beaucoup plus d'exactitude les nombres respectifs A par la méthode du n° 100, en observant cependant que la formule devient dans ce cas $A = \frac{1}{2.6}(a - b + c)$.

Les nombres B correspondans, soit aux ascensions droites et aux déclinaisons, soit aux longitudes et aux latitudes, se calculeront de la manière que nous avons dit (n° 94 et suiv.).

FIN.

NOTES DU TRADUCTEUR

SUR

LE RÉTICULE RHOMBOÏDE.

Sur les n°s 1, 2.

On n'est pas d'accord sur l'Astronome qui le premier a employé le Réticule Rhomboïde; et quoique Lalande l'attribue à Bradley, il paraît cependant par l'Optique de Smith, art. 876, que Jac. Bradley est seulement l'inventeur du réticule triangulaire qu'on y trouve décrit. Quoi qu'il en soit, il est certain que Lacaille a employé le Réticule Rhomboïde depuis 1751, dans ses Observations du *Cœlum australe*.

Quant à l'usage de ce petit instrument, Lalande suppose dans son Astronomie, qu'on ne se sert du fil de la petite diagonale que pour examiner préalablement si elle est parallèle à l'équateur, et dans les art. 2354, 2514, il croit nécessaire que l'un des astres, dans son mouvement diurne, parcoure exactement cette diagonale. Mais cette opération étant longue et très-peu sûre, il y a long-temps que J. Bernoulli a fait voir la manière de l'éviter, en déterminant l'inclinaison du Réticule ordinaire, au moyen des passages d'une étoile connue par deux côtés et la diagonale Mais le travail le plus complet sur cet objet, est celui que M. Delambre a donné dans la *Connaissance des Temps* de l'an XII, publiée en 1801. Ce savant Astronome y donne toutes les formules nécessaires pour déterminer l'inclinaison du Réticule, la déclinaison de son centre, et la correction du passage observé à la diagonale horaire, au moyen des passages d'étoiles connues, par trois ou même quatre fils du Réticule; et ses formules, comme celles de notre auteur, sont applicables à tous les Réticules rhomboïdaux;

Digitized by Google

M. Burckhardt avait donné aussi des formules pour déterminer la position des astres, au moyen du Réticule carré qu'il croit plus aisé à vérifier que celui de Bradley. Dans ces méthodes, une des observations se fait toujours à l'une ou à l'autre des diagonales. Dans le Réticule proposé par notre Auteur, les deux diagonales sont supprimées; il détermine l'inclinaison du Réticule par rapport au parallèle vrai de l'étoile connue; la déclinaison ainsi que les passages de chacun des sommets sont corrigés, non-seulement de l'effet de la réfraction, mais aussi de l'inexactitude provenant de la courbure du parallèle et de la convergence des méridiens : et cette dernière correction est nécessaire, surtout pour les astres dont la déclinaison est considérable, ainsi que celle de la réfraction pour ceux qui s'élèvent très-peu au-dessus de l'horizon.

Sur les n°s 4 et 13.

Les nombres 0°,0156 et 0,000273 représentent également l'arc de 56″,16, réduit en degrés ou en parties du rayon; et cet arc est pris ici pour la réfraction en hauteur, à 45° de distance au zénith. Cette réfraction est de 56″,6, d'après Bradley, et de 58″,2 suivant Delambre. Comme il parait que le seul état hygrométrique de l'air peut faire varier cet élément de 2″, il n'y a aucun inconvénient à prendre l'un quelconque de ces nombres.

Soit (fig. 6, pl. I) Z le zénith, P le pôle, A le lieu vrai d'un astre, et a son lieu apparent, en vertu de la réfraction. L'arc Aa représentera la réfraction en hauteur, Ab la réfraction en déclinaison, et l'angle APa la réfraction en ascension droite.

Soit

$$AP = 90° - D, \qquad AZP = H,$$
$$ZP = 90 - P, \qquad PAZ = \mu,$$
$$AZ = \pi, \qquad 0°,0156 = \rho.$$

En supposant, d'après la loi connue

$$Aa = \rho \operatorname{tang} \pi,$$

on aura

$$Ab = \rho \operatorname{tang} \pi \cos \mu, \quad APa = \frac{ab}{\cos D} = \frac{\rho \operatorname{tang} \pi . \sin \mu}{\cos D};$$

Digitized by Google

mais on a aussi

$$\sin\pi = \frac{\sin H\cos P}{\sin\mu},\quad \cos\pi = \sin D\sin P + \cos D\cos P\cos H,$$

$$\sin\mu = \frac{\sin H\cos P}{\sin\pi},\quad \cos\mu = \frac{\sin P - \sin D\cos\pi}{\cos D\sin\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\frac{\cos D\sin P - \sin D\cos P\cos H}{\sin\pi}$: en substituant ces valeurs dans les expressions de Ab, et de APa, on aura

$$\text{réfrac. en asc. droite} = \frac{\rho\sin H}{\cos^2 D\,(\cos H + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P)},$$

$$\text{réfrac. en déclin.}\ldots = \frac{\rho(\operatorname{tang} P - \operatorname{tang} D\cos H)}{\cos H + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P}.$$

En différentiant ces deux équations par rapport à H, on aura aussi

$$\text{variat. de la réfract. en asc. dr.} = \frac{\rho(1 + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P\cos H)\,dH}{\cos^2 D\,(\cos H + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P)^2},$$

$$\text{variat. de la réfract. en déclin.} = \frac{\rho\sin H\operatorname{tang} P\,dH}{\cos^2 D\,(\cos H + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P)^2}.$$

L'arc ab étant le parallèle vrai, soit ac la direction du parallèle apparent de l'astre, et nommons φ' le petit angle bac. On aura évidemment

$$\varphi' = \frac{bc}{ab} = \frac{\text{variat. réfract. en déclin.}}{dH\cos D} = \frac{\rho\sin H\operatorname{tang} P}{\cos^2 D\,(\cos H + \operatorname{tang} D\operatorname{tang} P)^2}.$$

Sur le n° 20.

Pag. 11, ligne 1. $\Phi' = \Phi - \varphi - \varphi'$, *lisez* « $\Phi = \Phi - \varphi + \varphi'$, parce que φ étant l'inclinaison du Réticule par rapport au parallèle apparent d'une étoile affectée seulement de la réfraction, et φ' l'inclinaison de ce parallèle au parallèle vrai, $\varphi - \varphi'$ sera l'inclinaison du Réticule au parallèle vrai. Pareillement, en nommant Φ l'inclinaison du Réticule par rapport au parallèle apparent d'un astre affecté de parallaxe, etc., et Φ' l'inclinaison inconnue

de ce parallèle au parallèle vrai, $\Phi - \Phi'$ sera l'inclinaison du Réticule au parallèle vrai, et par conséquent

$$\Phi - \Phi' = \varphi - \varphi', \text{ ou } \Phi' = \Phi - \varphi + \varphi'. \text{ »}$$

Sur le n° 24.

Lacaille, dans ses Observations du *Cœlum australe*, a employé trois différens Réticules Rhomboïdaux, et un quatrième composé seulement de deux lames parallèles. Ce dernier ne lui a servi que pour les astres compris entre les six premiers degrés de distance au pôle, et des trois autres il employait celui dont la petite diagonale était plus courte à mesure que l'astre était plus près du pôle. Mais il est aisé de voir que les erreurs provenantes de la courbure du parallèle, quoique diminuées par ces moyens, ne pouvaient pas être tout-à-fait anéanties.

Digitized by Google

NOTES

SUR

L'INSTRUMENT DES PASSAGES.

Sur les n°s 1, 2.

On peut voir, dans l'ouvrage de Smith (*A compl. system. of opticks.* Lond. 1738), ou dans celui de Monier (*Hist. Cél.* Paris, 1741), et mieux encore dans celui de Th. Bugge (*Obs. Astron.* Hauniæ, 1784), la description du Télescope-méridien, la manière de le placer, et de vérifier chacune de ses parties. D'après le dernier de ces Auteurs, Olaus Roëmer fut le premier qui, en 1681, fit construire pour l'Observatoire de Copenhague, un instrument de cette espèce. Halley, en le simplifiant, s'en servit ensuite à Greenwich, pendant plus de dix ans, pour les observations des ascensions droites de la Lune, qu'il acheva en 1731. C'est en 1737 que le Monier a commencé à Paris ses observations avec un Instrument des Passages. Et ce n'est que vers la moitié du dernier siècle que Shhort et Bird ont porté ces Instrumens à l'état de perfection où on les trouve aujourd'hui, ce qui les a fait adopter dans tous les Observatoires. Jusqu'à cette époque, le quart de cercle mural était le seul instrument qui servît pour déterminer les ascensions droites; et l'on peut voir dans l'ouvrage cité de Monier, ou dans les Tables de la Hire, les difficultés que ce dernier a eu à vaincre pour placer un de ces instrumens dans le plan du méridien, et l'im-

possilité qu'il y a d'en dresser le limbe, sans qu'il en résulte toujours la nécessité de déterminer la déclinaison de chacun de ses points; les erreurs sur quelques points, allaient jusqu'à 18" de temps vers l'orient et sur d'autres vers l'occident. Graham et Bird ayant beaucoup perfectionné la construction de ces Instrumens, le Monier publia, en 1774 (*Arts et Métiers*), une description très-complète du quart de cercle mural. C'est dans cet ouvrage, et à cette époque, que cet Astronome paraît encore lever des doutes sur la bonté des Instrumens des Passages, particulièrement sur la conservation de la perpendicularité entre l'axe de rotation et celui de la lunette, sur le niveau à bulle d'air, etc. « Toutes ces circonstances, dit-il, ont fait présumer qu'on pourrait obtenir au moins autant de précision aux passages observés par le fil de la lunette du quart de cercle mural, dans l'état de perfection auquel on l'a porté jusqu'ici. »

Sur les n°s 7..... 10.

L'Auteur a disposé les expressions de x, y, z, de manière à être calculées par les tables des sinus naturels; mais il serait très-aisé, et peut-être plus commode, de les transformer en produits pour l'usage des logarithmes. C'est sous cette dernière forme que M. Oriani a publié dans les Éphémérides de Milan, pour 1803, des formules pour corriger ces mêmes erreurs. Cet Auteur n'en a pas donné la démonstration, et celle qu'on va voir ne sera qu'une répétition des raisonnemens qu'on a vus dans les n°s 7, 8, 9, 10.

Soit AZB (pl. I, fig. 5) le méridien, P le pôle, Z le zéniht, AOB l'horizon, O le vrai point de l'Est ou de l'Ouest; supposons que l'axe de rotation soit dirigé vers le point E, au lieu de l'être vers le point O, et que l'axe optique de la lunette décrive le cercle $P'S$ au lieu du méridien PZ. Dans ce cas, un astre dont on aurait déterminé le temps τ du passage au méridien, par des hauteurs correspondantes, ne passera par la lunette au point S que dans le temps τ, plus ou moins l'angle ZPS réduit en temps.

Digitized by Google

Soit

$$OD = x,\ DE = y,\ ES = 90° - z,\ BP = L,\ PS = D,\ ZPS = \delta.$$

Les arcs x, y, z, δ étant très-petits, on aura par le triangle EPS,

$$\cos EPS = \frac{\cos ES - \cos PS \cos PE}{\sin PS \sin PE} = \frac{z}{\sin D} - \text{cotang } D \cos PE$$
$$= \cos(EPZ - \delta) = \cos EPZ + \delta;$$

le triangle EPZ donne

$$\cos EPZ = \frac{\cos ZE - \cos ZP \cos PE}{\sin ZP \sin PE} = \frac{y}{\cos L} - \text{tang } L \cos PE;$$

on déduit aussi de ce même triangle $\cos PE = \cos ZE \cos ZP + \cos EZP \sin ZE \sin ZP = y \sin L + x \cos L$; on aura donc

$$\delta = \frac{z}{\sin D} - \frac{y}{\cos L} + \frac{y \sin^2 L}{\cos L} + x \sin L - (y \sin L + x \cos L)\frac{\cos D}{\sin D};$$

ou bien

$$\delta = \frac{z + (x \sin L - y \cos L) \sin D - (x \cos L + y \sin L) \cos D}{\sin D}.$$

Si l'on fait maintenant $z = H$, $x \sin L - y \cos L = M$, $x \cos L + y \sin L = -N$, on aura

$$x = M \sin L - N \cos L$$
$$-y = M \cos L + N \sin L,$$
$$\delta = \frac{H + M \sin D + N \cos D}{\sin D} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Telles sont les formules de M. Oriani (§§ 3 et 6).

Afin de déterminer les valeurs de H, M et N, au moyen des observations; soient A, B, C, les distances de trois étoiles au pôle; α, ϵ, γ les erreurs de leurs passages à la lunette méridienne, réduites en arc. Supposons de plus $A > B$ et $B > C$; et faisons, pour abréger, $\alpha \sin A = a$, $\epsilon \sin B = b$, $\gamma \sin C = c$. Cela étant, l'équation fondamentale (a) donnera les trois suivantes

$$\left.\begin{aligned} a &= H + M\sin A + N\cos A,\\ b &= H + M\sin B + N\cos B,\\ c &= H + M\sin B + N\cos C. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (b)$$

En éliminant N des deux premières, il viendra

$$a\cos B - b\cos A = H(\cos B - \cos A) + M\sin(A-B);$$

en changeant dans cette équation b et B en c et C, ensuite a et A en b et B, on aura aussi les deux

$$\left.\begin{aligned} a\cos C - c\cos A &= H(\cos C - \cos A) + M\sin(A-C),\\ b\cos C - c\cos B &= H(\cos C - \cos B) + M\sin(B-C). \end{aligned}\right\}\ldots (c)$$

En retranchant la seconde, de ces trois équations, de la somme des deux autres, on aura

$$\begin{aligned} &a(\cos B - \cos C) + b(\cos C - \cos A) + c(\cos A - \cos B)\\ &\quad = M[\sin(A-B) - \sin(A-C) + \sin(B-C)], \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &-a\sin\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{A+C}{2}.\sin\frac{A-C}{2} - c\sin\frac{A+B}{2}\\ &\quad .\sin\frac{A-B}{2} = +2M\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}; \end{aligned}$$

et par conséquent

$$-M = -\frac{\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}} - \frac{\frac{b}{2}\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}} + \frac{\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}.$$

En suivant le même procédé, on déduit des équations..... (b)

$$-N = -\frac{\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}} - \frac{\frac{b}{2}\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}} + \frac{\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}};$$

enfin les équations (c) donnent, après les réductions,

$$+H = -\frac{\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}} - \frac{\frac{b}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}} + \frac{\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}.$$

Digitized by Google

Toutes les autres conséquences sont aisées à déduire de ces mêmes principes.

Ces formules sont élégantes à la vérité, mais toute leur exactitude dépend de celle des petites erreurs α, ζ, γ. Or, les positions des étoiles ne sont pas assez sûres pour qu'on puisse calculer ces erreurs d'après les catalogues, et l'on sait qu'on ne peut pas répondre d'une erreur de $\frac{1}{4}''$ en temps, ou de $3'' \frac{3}{4}$ en arc, en les déterminant par des hauteurs correspondantes : aussi de très-célèbres Astronomes n'y ont aucune confiance, en reconnaissant pourtant qu'on ne peut pas découvrir une erreur de $4''$ par les rectifications du niveau, et que la grosseur des fils de la lunette cache un angle au moins de $5''$. « Pour voir comment on doit se fier à ces formules (dit le célèbre Delambre), il faudrait combiner trois à trois, un grand nombre d'observations; le calcul serait bien pénible, et je suis persuadé qu'on y trouverait bien peu d'accord. Cependant cela vaut la peine d'être tenté. »

NOTES

SUR

LE CALCUL DES ÉCLIPSES.

Sur les nos 5, 6, ... 10.

L'Auteur, en déterminant la position de l'observateur par trois coordonnées orthogonales, suppose d'abord que l'astre auquel l'observateur rapporte son mouvement diurne, n'a point de parallaxe, et que par conséquent la perpendiculaire menée de l'observateur au plan de projection, passe toujours par l'astre fixe. Il indique ensuite (n° 19) les corrections à faire aux coordonnées, si l'astre a une parallaxe sensible. C'est dans la vue d'éclaircir cet objet, que j'ai essayé de résoudre directement le même problème.

Soit (fig. 1, planche III) C le centre du sphéroïde terrestre, CP la direction de l'axe des pôles, S l'astre fixe auquel l'observateur rapporte son mouvement diurne; le plan SCP, que nous supposerons être celui de la figure, est ce que l'on nomme le méridien fixe. Du centre C et avec le rayon CL, distance de la Lune que nous supposerons $= 1$, concevons qu'on décrive une sphère à laquelle soit élevé du point L le plan tangent $Laoo'$, qu'on nommera le plan de projection; Lo' est l'intersection de ce plan avec celui de la figure, et Lo son intersection avec le plan $C\omega S$, et par conséquent l'angle rectiligne oLo' est la mesure de l'angle sphérique ZLP.

Digitized by Google

Le cercle $A\omega B$ est un parallèle terrestre quelconque ; et son plan étant perpendiculaire à CP, les rayons NA, $N\omega$ seront perpendiculaires à CP. Supposons que l'observateur qui est censé décrire ce parallèle se trouve en ω, la droite $C\omega$ menée du centre de la Terre par le point ω, marquera dans la sphère le zénith Z de l'observateur ; et le diamètre AB du parallèle étant dans le plan du méridien fixe, l'angle rectiligne ωNA sera la mesure de l'angle sphérique ZPL. Ainsi, tandis que l'observateur décrit l'arc $A\omega$ de son parallèle, l'astre S lui paraîtra décrire sur le plan de projection l'arc elliptique ao. Soit menée du point o la droite oo' perpendiculaire à Lo' ; il s'agit de trouver les valeurs de Lo', oo', $o\omega$, qui déterminent la position apparente de l'astre dans le plan de projection par rapport à celle de l'observateur en ω.

Soit

$\pi = SCZ =$ distance de l'astre au zénith de l'observateur,
$\mu = o'Lo = PLZ =$ angle formé à l'astre par le vertical et le méridien fixe,
$H = AN\omega = LPZ =$ angle horaire,
$90° - D = SCP =$ distance de l'astre au pôle,
$90 - P = ZCP =$ distance du zénith au pôle,
$\lambda = Co\omega =$ parallaxe de la Lune
$\sigma = CS\omega =$ parallaxe de l'astre } en hauteur,
$a = CS =$ distance des centres de la Terre et de l'astre,
$p = C\omega =$ distance du centre de la Terre à un point quelconque de la circonférence du parallèle $A\omega B$.

Cela étant, on a d'abord

$$Lo = \text{tang } LCo = \text{tang } (Co\omega - CS\omega) = \text{tang } (\lambda - \sigma),$$

et par conséquent, dans le triangle rectangle Loo', on aura

$$\left.\begin{aligned} Lo' &= \text{tang } (\lambda - \sigma) \cos\mu \\ oo' &= \text{tang } (\lambda - \sigma) \sin\mu \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Soient maintenant ωD parallèle à oL, et oE parallèle à CL : dans le triangle rectangle $CD\omega$, on a $D\omega = p \sin\pi$, $CD = p \cos\pi$,

partant $oE = 1 - p\cos\pi$, $E\omega = p\sin\pi - \text{tang}(\lambda - \sigma)$; et par conséquent, dans le triangle rectangle ωoE, on aura

$$\text{tang}\,\sigma = \frac{p\sin\pi - \text{tang}(\lambda-\sigma)}{1-p\cos\pi} \quad \text{et} \quad \omega o = \frac{1-p\cos\pi}{\cos\sigma} \ldots\ldots (b)$$

Mais on a aussi, dans le triangle SLo, $\text{tang}\,\sigma = \frac{\text{tang}(\lambda-\sigma)}{a-1}$, on aura donc les deux équations

$$a - 1 = \frac{\text{tang}(\lambda-\sigma)}{\text{tang}\,\sigma} = \frac{\text{tang}(\lambda-\sigma)(1-p\cos\pi)}{p\sin\pi - \text{tang}(\lambda-\sigma)}; \ldots\ldots (b')$$

a et p restant les mêmes, supposons que λ se change en l et σ en lorsque $\pi = 90°$, c'est-à-dire, soit l la parallaxe horizontale de la Lune et s celle de l'astre, pour le lieu ω lors de la conjonction; les deux expressions de $a - 1$ donneront

$$a - 1 = \frac{\text{tang}(l-s)}{\text{tang}\,s} = \frac{\text{tang}(l-s)}{p - \text{tang}(l-s)};$$

et par conséquent

$$p = \text{tang}(l-s) + \text{tang}\,s = \frac{\sin l}{\cos(l-s)\cos s}.$$

En substituant cette valeur de p dans l'équation (b'), on aura

$$\text{tang}(\lambda-\sigma) = \frac{\text{tang}(l-s)\sin\pi}{1-\text{tang}\,s\cos\pi} = \text{tang}(l-s)\sin\pi$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{tang}(l-s)\,\text{tang}\,s\,\sin 2\pi + \text{etc.}$$

Le second terme, en supposant $l - s = 62'$, $s = 10''$, ne va guère qu'à $0'',09$, et on aura, sans erreur sensible,

$$\text{tang}(\lambda-\sigma) = \text{tang}(l-s)\sin\pi,\ p = \text{tang}\,l = a\,\text{tang}\,s \ldots. (c)$$

Il nous reste maintenant à déterminer les angles π et μ. Pour cela, on a dans le triangle sphérique PZL,

$$\sin\pi\sin\mu = \cos P\sin H,\ \cos\pi = \sin D\sin P + \cos D\cos P\cos H,$$
$$\cos\mu = \frac{\sin P - \sin D\cos\pi}{\cos D\sin\pi}; \text{ et par conséquent}$$
$$\sin\pi\cos\mu = \sin P\cos D - \sin D\cos P\cos H.$$

Ainsi les expressions (a) des deux coordonnées Lo', oo', et celle (b)

Digitized by Google

de la distance ωo deviendront enfin

$$\left.\begin{array}{l} Lo' = \text{tang}\,(l-s)\,[\sin P\cos D - \sin D\cos P\cos H] \\ oo' = \text{tang}\,(l-s)\cos P\sin H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega o = 1 - \text{tang}\,l\,[\sin D\sin P + \cos D\cos P\cos H] \end{array}\right\} \ldots\,(d)$$

On peut remarquer, 1°. que P et D restant les mêmes, l'ordonnée oo' devient nulle lorsque $H=0$ et $H=180°$; que les valeurs de l'abscisse Lo', dans ces deux cas, sont $\text{tang}\,(l-s)\sin(P-D)$, $\text{tang}\,(l-s)\sin(P+D)$, et que par conséquent leur différence $\text{tang}(l-s)\,2\sin D\cos P$, est le petit diamètre ab de l'ellipse, dirigé dans le plan du méridien fixe; le grand diamètre perpendiculaire à ce dernier, sera $\text{tang}\,(l-s)\cos P$, et il correspondra à $H=90°$. Ces ellipses sont donc d'autant plus petites, que l'observateur est plus près du pôle.

2°. Lorsque l'astre arrive à l'horizon de l'observateur, on a $\pi=\pm 90°$, et par conséquent $\cos(\pm\pi)=0=\sin D\sin P+\cos D\cos P\cos H$, ce qui donne $\cos H=-\text{tang}\,D\,\text{tang}\,P$. Cette expression indique que l'astre ne peut se cacher sous l'horizon que lorsque $D+P<90°$.

3°. On peut regarder les droites tracées dans le plan de projection comme des arcs de cercle fort petits, et dont le rayon est la distance du centre de la Terre à la Lune, que nous avons prise pour unité; mais si l'on veut réduire ces lignes à des arcs de cercle dont le rayon soit la distance ωo de l'observateur au plan de projection, on n'a qu'à les multiplier par le rapport $\frac{CL}{\omega o}=\frac{1}{1-\text{tang}\,l\cos\pi}$ $=1+\text{tang}\,l\cos\pi+\text{tang}^2 l+\cos^2\pi$, en négligeant les autres puissances de $\text{tang}\,l$; le dernier terme, pour le cas de 1° de distance, peut aller jusqu'à 1'.

Sur les n°s 16, 17.....22.

Problème fondamental.

Étant donné le temps de la conjonction en ascension droite entre la Lune et un autre astre avec leurs déclinaisons, trouver la distance apparente des centres pour un moment peu éloigné; on suppose aussi que la différence des déclinaisons ne soit pas trop grande.

Concevons que le plan OLO' de la fig. 2, soit le plan de projection OLO' que nous venons de considérer dans la fig. 1, et que LO' indique la projection du méridien fixe. Supposons que l'astre et la Lune, au moment de leur conjonction en ascension droite, se soient trouvés, le premier en a et la seconde en l'; et que tandis que l'astre a paru décrire l'arc elliptique aO, la Lune ait décrit dans le même temps la ligne $l'l$. Il s'agit de déterminer la distance des centres lO pour un temps t peu éloigné de celui de la conjonction.

Pour cela, nous supposerons que les mouvemens de la Lune, pendant un temps t moindre de 12^h, sont assez exactement représentés par des équations de cette forme

$$\left.\begin{array}{l}\text{mouv. } \mathbb{C} \text{ en ascens. droite} = At + Bt^2 \\ \text{mouv. } \mathbb{C} \text{ en déclin.....} = \delta t + n't^2\end{array}\right\} (Voy.\ \text{pag. } 102, 159).$$

Or, pendant le même intervalle les mouvemens de l'astre peuvent être regardés comme uniformes; en prenant donc, pour A, la différence des mouvemens horaires en ascension droite entre la Lune et l'astre au moment de leur conjonction, et pour δ la différence de leurs mouvemens en déclinaison, on pourra regarder l'astre comme fixe pendant le temps t, et représenter par les formules $At + Bt^2$, $\delta t + n't^2$ les mouvemens relatifs de la Lune à l'astre en ascension droite et en déclinaison, pendant le même intervalle.

Soit lm parallèle, et ln perpendiculaire au méridien LO', on aura $\delta t + n't^2 = l'n$: ln représentera le parallèle décrit par la Lune, opposé à un angle au pôle $= At + Bt^2$; et pour trouver l'expression de cette ligne, il faudra multiplier l'angle au pôle par le cosinus de la déclinaison de la Lune ou, plus exactement, par le cosinus de la déclinaison correspondante à la moitié de l'intervalle compté depuis la conjonction. Ainsi, en désignant par D' la déclinaison de la Lune lorsque $t = 0$, $D' + \frac{\delta t}{2} + \frac{n't^2}{4}$ sera la déclinaison dans l'instant $\frac{1}{2}t$, après la conjonction, et on aura par conséquent

$$ln = (At + Bt^2) \cos\left(D' + \frac{\delta t}{2} + \frac{n't^2}{4}\right);$$

d'où l'on tire, en se bornant aux termes multipliés par t^2,

$$ln = tA\cos D' + \left(B\cos D' - \frac{A\delta}{2}\sin D'\right)t^2;$$

et en faisant $h = A\cos D'$ et $n = B\cos D' - \frac{1}{2}\delta\sin h\,\text{tang}\,D'$, on aura $ln = ht + nt^2$. Soit D la déclinaison de l'astre au moment de la conjonction, $\Delta = D' - D$, $LO' = m$, $OO' = n$ (d). On aura

$$lm = nO' = Ll' + l'n - LO' = \Delta + \delta t + n't^2 + d't\sin p\cos\pi - m - \frac{mp't}{2p},$$

$$mO = mO' - OO' \ldots\ldots = ht + nt^2 - n - \frac{np't}{2p},$$

en désignant par $\frac{mp't}{2p}$, $\frac{np't}{2p}$ les corrections de m et de n qui résultent de la variation de la parallaxe pendant le temps t, et par $d't\sin p\cos\pi$ la variation de la déclinaison pendant le même intervalle (n° 10). Ainsi, en faisant $lm = M$, $mO = N$, et en cherchant l'angle φ, au moyen de l'équation $\text{tang}\,\varphi = \frac{N}{M}$, on aura la distance cherchée lO, que nous nommerons Σ, $= \frac{N}{\sin\varphi} = \frac{M}{\cos\varphi}$.

Cette distance est la tangente de l'angle par lequel elle serait vue du centre de la Terre dans le plan de projection (fig. 1); mais en nommant S l'angle par lequel elle serait vue du lieu de l'observateur ω, on aura

$$S = \frac{\Sigma}{1 - p\cos\pi} = \Sigma + \Sigma p\cos\pi, \text{ à très-peu près.}$$

Sur le n° 56.

On peut résoudre aussi ce problème indépendamment du plan de projection.

Soit (fig. 5, pl. III) P le pôle de l'équateur, Π le pôle de l'écliptique, L le lieu de la Lune et S le lieu de l'astre au moment de leur conjonction en ascension droite; λ le lieu de la Lune et σ le lieu de l'astre lors de leur conjonction en longitude : soient enfin λl, σs deux parallèles à l'équateur.

En conservant les définitions des n°s 56, 21, et en nommant $\sigma\lambda = \Lambda$, $SL = \Delta$, $\sigma P\Pi = 90^\circ \pm A$, $\Pi\sigma = 90^\circ \pm L$, $P\Pi = E$, et $P\sigma\Pi = \lambda$, on aura d'abord

$$\cos L : \cos A :: \sin E : \sin\lambda = \frac{\cos A\sin E}{\cos L},\ \sigma l' = \Lambda\cos\lambda,\ \lambda l' = \Lambda\sin\lambda.$$

On a ensuite $\sigma l' = SL - (lL - sS) = -(\delta t + n't^2$ (Note précéd.)

$$\lambda l' = \ldots\ldots\ldots \lambda l - ll' = ht + nt^2,$$

et par conséquent cotang. $\lambda = \frac{\Delta}{ht + nt^2} - \frac{\delta t + n't^2}{ht + nt^2}$.

En faisant donc $\frac{\delta + n't}{h + nt} = \text{tang } \alpha$, on aura

$$\frac{\Delta}{ht + nt^2} = \frac{\cos(\alpha - \lambda)}{\cos \alpha \sin \lambda},$$

on bien $\quad ht + nt^2 = \frac{\Delta \cos \alpha \sin \lambda}{\cos(\alpha - \lambda)} = \Lambda \sin \lambda$;

et enfin $\quad \Delta = \frac{\Delta \cos \alpha}{\cos(\alpha - \lambda)}$, et $t = \frac{\Lambda \sin \lambda}{h + nt}$.

Sur le n° 81.

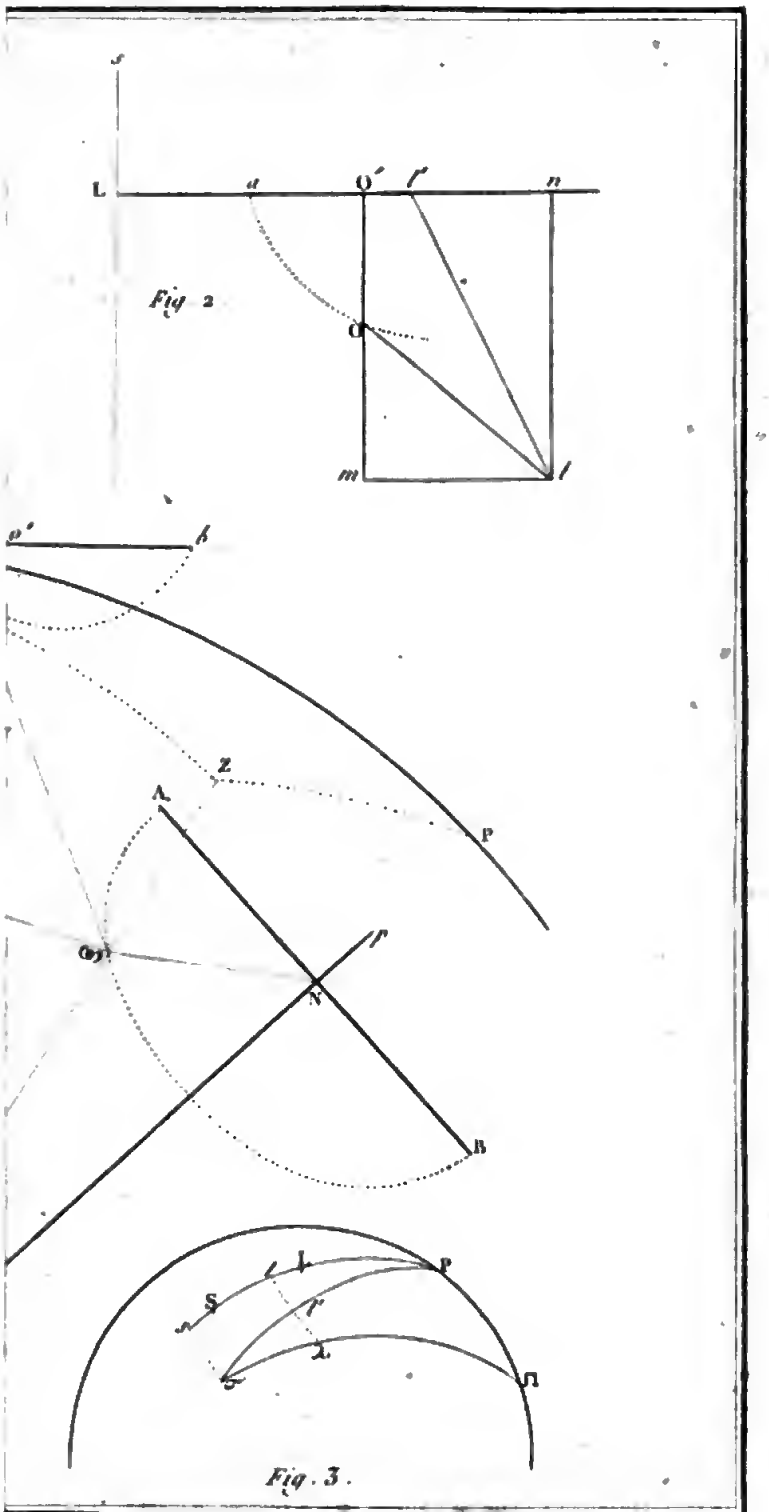
L'addition sur ce problème et sur le précédent, que l'Auteur avait fait espérer, ne m'est point parvenue.

FIN DES NOTES.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
6	9	π	π'
7	4, en rem.	T''	τ'
8	5	On a donc.....	On a
11	1	$\Phi' - \Phi - \varphi - \varphi'$	$\Phi' = \Phi - \varphi + \varphi'$
21	11, en rem.	le méridien PS au lieu de PZ	le cercle $P'S$ au lieu du méridien PZ
23	3, en rem.	*dans le premier terme du numérateur de* y, sin d	sin d'
25	5	quantités du, x, y, z.....	quantités x, y, z.
42	15, en rem.	2,5663025.....	2,5563025
51	4	sin 15′,2	sin 15°,2
120	3, en rem.	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{300}$
122	17	et aisant	et faisant
127	5, en rem.	$E = \frac{(n-1)\,(\text{etc.})}{(n+1)\,(\text{etc.})}$	$E = \frac{n(n-1)\,(\text{etc.})}{(n+1)\,(\text{etc.})}$

606830
>6N


L
a
O'
f'
n
O
m
l
Fig 2
a'
b
Z
A
P
O
f
N
B
S
P
Z
Fig. 3.

Digitized by Google

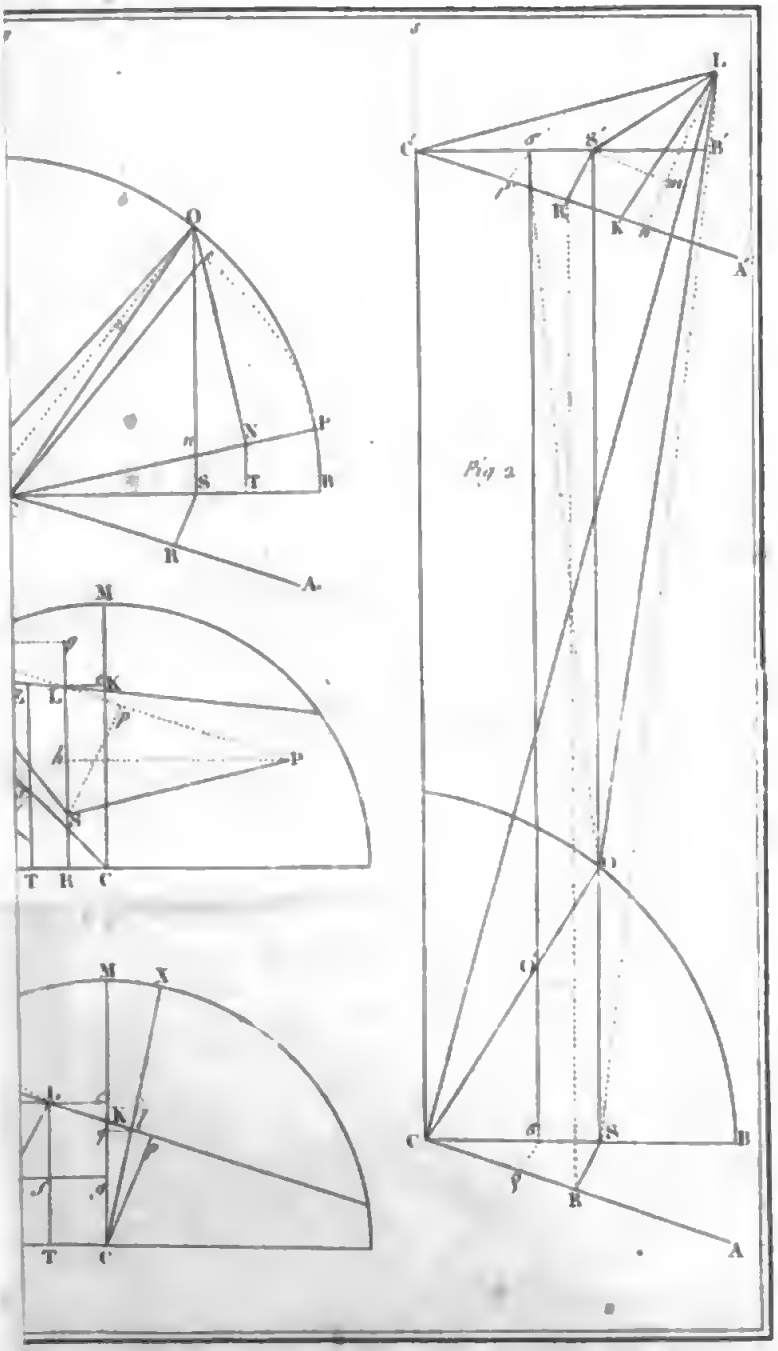


Fig 2
L
C'
σ'
S'
B'
A'
O
N
P
m
S
T
B
R
A
M
Z
L
K
p
h
P
N
T
R
C
M
X
K
T
C
D
O
C
σ
S
B
p
R
A

Digitized by Google

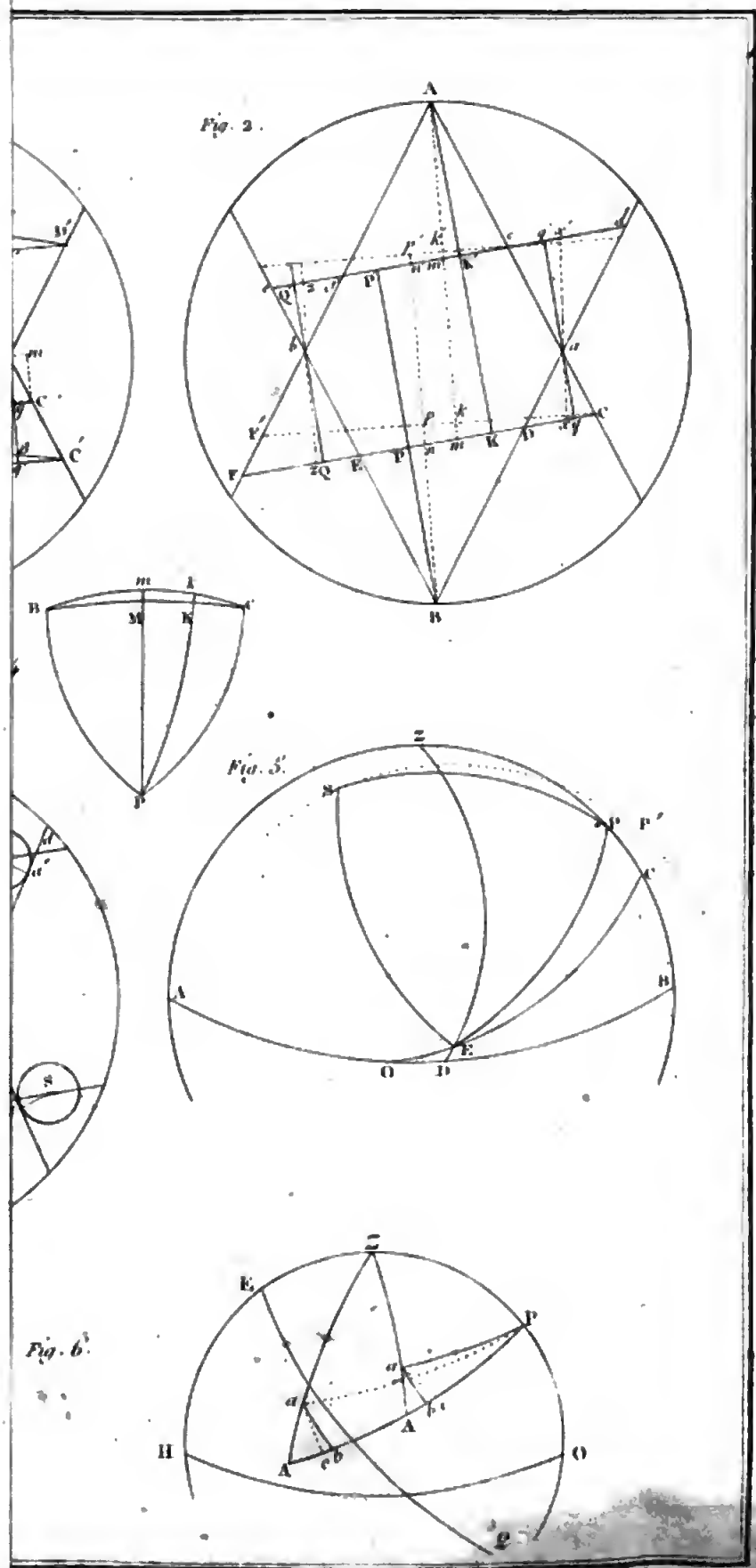


Fig. 2.
A
B
Fig. 3.
Z
Fig. 6.

NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google